ちょっと寄り道

線形写像の例を2つ挙げてみる.

$V = \{$微分可能な$\mathbb{R}$上の関数全体$\}$.

$T = \frac{d}{dx}$: 微分作用素　とする.

例えば微分方程式

$y'' + y' + y = 3$　を考えると. これは.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{d}{dx}y + y\right) = 3$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} + \frac{d}{dx} + 1\right)y = 3$$

$$(T^2 + T + 1_V) \cdot y = 3$$

とTを使って表せる.

→ 微分方程式ではなく. 線形代数のやり方で解くことが考えられる.

電子の時刻 $t=0$ における状態を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で表すことができ. さらに.

時刻 $t=t_0$ における状態は. 行列Aを使って.

$e^{it_0 A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　で表せる. ここで. $e^{it_0 A}$ は線形写像.

線形写像の表現行列：

Vの基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$，Wの基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ をとっておく．

$f: V \to W$ に対し．V, Wの基底を固定して考えるとき，

$f: V\{v_1, \cdots, v_n\} \longrightarrow W\{w_1, \cdots, w_m\}$ と表す．

$x \in V$ は $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を使って．

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ と表せた．

これをfで写したものを考えると．

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) \\ &= f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \cdots + f(x_n v_n) \\ &= x_1 \cdot f(v_1) + x_2 \cdot f(v_2) + \cdots + x_n \cdot f(v_n) \end{aligned}$$ とできる．

$\longrightarrow$ これは $f(x)$ が $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ で決まることを示している．

今．$f(v_j) \in W$ より．$\{w_1, \cdots, w_m\}$ を使って．

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \cdots + a_{mj} w_m = [w_1 \cdots w_m]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ とできる

これを使うと．$f(x)$ は次のように表せる．

$$f(x) = x_1 \cdot a_{11} w_1 + x_1 a_{21} w_2 + \cdots + x_1 a_{m1} w_m$$
$$+ x_2 a_{12} w_1 + x_2 a_{22} w_2 + \cdots + x_2 a_{m2} w_m$$
$$\vdots$$
$$+ x_n a_{1n} w_1 + x_n a_{2n} w_2 + \cdots + x_n a_{mn} w_m$$

$$= [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_m] \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ x_2 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_n a_{m1} + x_n a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= [w_1 \cdots w_m] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ここで、この A を、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{w_1, \cdots, w_m\}$ に関する f の表現行列 という。 ⟶ f は A で表されている！

例題. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + 3z \\ 2x + 3y - z \end{bmatrix}$$

とする. ここで.

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ と } \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する. f の表現行列 A を求めよ.

答. まず. $f(v_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}w_1 - \frac{3}{2}w_2 = [w_1 \ \ w_2]\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ とできる. 同様に.

$$\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ をとくと } a = \frac{5}{2},\ b = -\frac{3}{2} \right)$$

$$f(v_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{9}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = [w_1 \ \ w_2]\begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$f(v_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3w_1 - w_2 = [w_1 \ \ w_2]\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ である

$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ である

問題. (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y \\ 2x-y \end{bmatrix}$ とする.

$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ と $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ に関する

fの表現行列 Aを求めよ.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ とするとき.

$\{e_1, e_2\}$ と $\{e_1, e_2\}$ に関する fの表現行列 Aを求めよ.

答. (1) $f(v_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 7w_1 - w_2 = [w_1 \ w_2]\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = 21w_1 - 10w_2 = [w_1 \ w_2]\begin{bmatrix} 21 \\ -10 \end{bmatrix}$ より

$A = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$ である

(2) $f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(e_2) = f\left(2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\therefore$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ である

命題 5.7.

(1) $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \to V\{v_1, \cdots, v_n\}$ の表現行列は E_n.

(2) $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \to V\{v_1', \cdots, v_n'\}$ の表現行列は.
$\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列.

(3)

$$\begin{array}{ccc} f : V\{v_1, \cdots, v_n\} & \xrightarrow{A} & W\{w_1, \cdots, w_m\} \\ \downarrow P & & \downarrow Q \\ f : V\{v_1', \cdots, v_n'\} & \xrightarrow{B} & W\{w_1', \cdots, w_n'\} \end{array}$$

とする. ただし. A, B は表現行列.

P, Q はそれぞれ $\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列.
$\{w_1', \cdots, w_n'\}$ から $\{w_1, \cdots, w_n\}$ への基底の変換行列.

このとき. $QA = BP$ が成り立つ. (つづく)

とくに．

$$\begin{array}{ccc} f: V\{v_1,\cdots,v_n\} & \xrightarrow{A} & V\{v_1,\cdots,v_n\} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ V\{v_1',\cdots,v_n'\} & \xrightarrow{B} & V\{v_1',\cdots,v_n'\} \end{array}$$

の場合，$A=P^{-1}BP$.

⊙ (1) は省略

(2) 基底の変換行列を P とすれば，

$[v_1 \cdots v_n] = [v_1' \cdots v_n']\cdot P$ より． $x = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ に対し

$1_V x = x = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v_1' \cdots v_n']\cdot P\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ よりわかる

(3) $x = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすると． $[w_1 \cdots w_m] = [w_1' \cdots w_m']Q$ より．

$f(x) = [w_1 \cdots w_m]A\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [w_1' \cdots w_m']QA\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. となる．一方．

$$f(x) = f\left([v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = f\left([v_1' \cdots v_n']P\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$= [v_1' \cdots v_n']\cdot BP\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ より． $QA = BP$ である．

さらに $Q=P$ なら $PA=BP$ より $A=P^{-1}BP$ となる