確率・統計　解答

1. $P(B)=\frac{3}{10}$，$P(B|A)=\frac{2}{9}$ より

$P(B)\neq P(B|A)$ であるので、独立ではない。

2. ベイズの定理より

$$\frac{0.4\times 0.02}{0.4\times 0.02+0.3\times 0.04+0.3\times 0.05}=\frac{8}{35}$$ である

3. (1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=\int_0^1 ax(1-x)\,dx=\frac{1}{6}a$ より $a=6$

(2) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}6x(1-x)\,dx=\left[3x^2-2x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=\frac{11}{32}$

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)\,dx=\int_0^1 6x^2(1-x)\,dx=\left[2x^3-\frac{3}{2}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\int_0^1 6x^3(1-x)\,dx-\frac{1}{4}$

$=\left[\frac{3}{2}x^4-\frac{6}{5}x^5\right]_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

4. $\overline{X}=\frac{1}{5}(3.2+1.5+3.5+2.8+3.0)=2.8$

$S^2=\frac{1}{4}\left((3.2)^2+(1.5)^2+(3.5)^2+(2.8)^2+(3.0)^2-(2.8)^2\times 5\right)=0.595$

5. サイコロを1回投げたときの期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ は

$E(X_1)=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{7}{2}$

$V(X_1)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

$\therefore V(X_n)=\frac{35}{12n}$ となり

$\frac{35}{12n}\leqq\frac{1}{10}$ より $n\geqq 30$ である。

6. 500個取り出したときの不良率 $\overline{X}$ は、ほぼ $N(p, \frac{p(1-p)}{500})$ に従う。

$P(\overline{X}-\delta \leqq p \leqq \overline{X}+\delta)=0.98$ となる δ を求めると、

$P(p-\delta \leqq \overline{X} \leqq p+\delta)=0.98$. ここで $Z=\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{500}}}$ とすれば $N(0,1)$ に従い、

$P\left(-\sqrt{\frac{500}{p(1-p)}}\delta \leqq Z \leqq \sqrt{\frac{500}{p(1-p)}}\delta\right)=0.98$

$P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\frac{500}{p(1-p)}}\delta\right)=0.49$ と変形できる。正規分布表より

$\sqrt{\frac{500}{p(1-p)}}\delta=2.3263$. ここで $p=\frac{10}{500}=\frac{1}{50}$ とおけば、

$\delta \fallingdotseq 0.0146$ となる

∴ 98%信頼区間は、$0.0054 \leqq p \leqq 0.0346$ である

7. (1) H_0 : 母平均 $\mu=12.6$

(2) H_1 : $\mu>12.6$

(3). $\overline{X}$ を標本平均とすると、これは $N(\mu, \frac{(1.8)^2}{20})$ に従うとしてよい。

$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1.8}{\sqrt{20}}}=\dfrac{\sqrt{20}}{1.8}(\overline{X}-\mu)$ とすると、これは $N(0,1)$ に従う。

(4) $P(Z>\theta(0.05))=0.05$ となる $\theta(0.05)$ は

$\theta(0.05)=1.6449$ なので、棄却域は $Z>1.6449$.

(5). Z の実現値は

$Z=\frac{\sqrt{20}}{1.8}(13.2-12.6) \fallingdotseq 1.49$

(6) ∴ Z は棄却域にないので、H_0 が採択される。

つまり、工程の改良に効果はなかった。