二項分布

例. $\frac{1}{10}$の確率で当りの出るアイスを5本買うとき 当りが2本出る確率は.

$${}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3=\frac{1}{10^5}\times\frac{5!}{3!\,2!}\times 9^2=0.0729$$ である.

これをより一般的に考える

[二項分布] 1回の試行で. ある事象Aが起る確率が p であるとき.

n回試行して. Aが起る回数を X とすると. この確率は.

$$P(X=x)={}_nC_x\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x} \qquad (x=0,1,\cdots,n)$$ となる

このとき X は 二項分布 $B(n,p)$ に従うという.

定理1.9.1. Xが $B(n,p)$ に従うとき.

$E(X)=n\cdot p$. $V(X)=np(1-p)$ である

∵ n回の試行をそれぞれ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とすると.

$E(X_i)=1\times p+0\times(1-p)=p$ である.

$\therefore E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\cdot p$.

$V(X_i)=1^2\times p+0^2\times(1-p)-p^2=p(1-p)$

$\therefore V(X)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=n\cdot p(1-p)$ である.

定理1.9.2. Xが $B(n,p)$ に従うとき. $E(X)=np\geqq 5$ であれば.

Xは近似的に $N(np, np(1-p))$ に従う.

定理1.9.3.

$$P(a\leqq X\leqq b)_{B(n,p)}\fallingdotseq P\left(a-\frac{1}{2}\leqq X\leqq b+\frac{1}{2}\right)_{N(np,n(1-p))}$$ とできる.

<u>例題</u>. $\frac{1}{10}$ で当るアイスを60本かうとき、10本以上当る確率を求めよ.

答 X は $B(60, \frac{1}{10})$ に従う. $E(X) = 60 \times \frac{1}{10} = 6 \geqq 5$ より.

X は $N(6, \frac{54}{10})$ に従うとしてよい.

$\therefore P(10 \leqq X)_{B(60, \frac{1}{10})} = P(9.5 \leqq X)_{N(6, \frac{54}{10})}$

$= P\left(\frac{9.5-6}{\sqrt{5.4}} \leqq Z\right)_{N(0,1)} = P(1.51 \leqq Z)_{N(0,1)}$

$= 0.5 - 0.4345 = 0.0655$ である.

<u>問題</u>. (1) コイントスを100回行うとき、60回以上表の確率を求めよ.

(2) P34. 問1を解け.

答 (1). $P(60 \leqq X)_{B(100, \frac{1}{2})} = P(59.5 \leqq X)_{N(50, 25)}$

$= P\left(\frac{59.5-50}{5} \leqq Z\right)_{N(0,1)} = P(1.9 \leqq X)$

$= 0.5 - 0.4713 = 0.0287$ である

(2) (i) $P(7 \leqq X)_{B(10, 0.65)} = P(6.5 \leqq X)_{N(6.5, 2.275)}$

$= P\left(\frac{6.5-6.5}{\sqrt{2.275}} \leqq Z\right)_{N(0,1)} = 0.5$

(ii) $P(X \leqq 3)_{B(10, 0.65)} = P(X \leqq 3.5)_{N(6.5, 2.275)}$

$= P\left(Z \leqq \frac{3.5-6.5}{\sqrt{2.275}}\right)_{N(0,1)} \fallingdotseq P(Z \leqq -2)_{N(0,1)}$

$= 0.227$ である