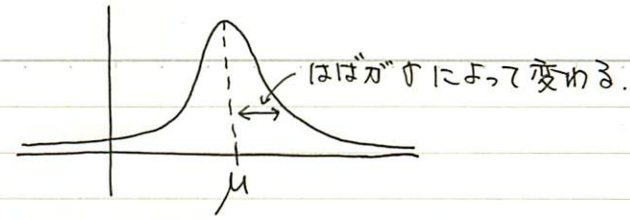
正規分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



の確率密度関数に従う連続型確率分布を正規分布またはガウス分布という.

この分布を $N(\mu, \sigma^2)$ とかく.

定理1.8.1. 確率変数 Z が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき.

$E(Z) = \mu$, $V(Z) = \sigma^2$ である.

∵ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて計算

とくに. $N(0, 1)$ を標準正規分布という. このときの確率密度関数は.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$ であたえられており.

$$\Phi(z) = P(0 \leqq Z \leqq z) = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz$$ と表す.

この積分は計算できないので. 正規分布表を利用する.

例. (1). $P(0 \leqq Z \leqq 0.86)$

(2) $P(-1.05 < Z < 1.29)$

(3) $P(0 < Z \leqq z) = 0.253$ をみたす z を求めよ

答 (1) 表I より $P(0 \leqq Z \leqq 0.86) = 0.3051$

(2) $P(-1.05 < Z < 1.29) = P(-1.05 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.29)$

$= P(0 < Z < 1.05) + P(0 < Z < 1.29) = 0.3531 + 0.4015 = 0.7546$.

(3) 表II より $z = 0.6840$ である.

$P(-\infty < Z < 0) = \frac{1}{2}$ をつかう.

問題 (1) $P(0 < Z < 0.53)$ (2) $P(Z < 1)$

(3) $P(z < Z < 0) = 0.382$ をみたす z を求めよ

答 (1) $P(0<Z<0.53)=0.2019$

(2) $P(Z<1)=P(-\infty<Z<0)+P(0<Z<1)$

$=\frac{1}{2}+0.3413=0.8413$.

(3) $P(0<Z<x)=0.382$ をみたす x は 1.1850 より

$z=-1.1850$ である.

定理1.8.2 X が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき, $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと.

Z は $N(0,1)$ に従う. さらに,

$P(a\leqq X\leqq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq Z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ となる.

$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$ で, $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ とおくと. $dz=\frac{1}{\sigma}dx$ より

積分 $=\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq Z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ となる

例. X が $N(5,36)$ に従うとき, $P(3<X<8)$ を求めよ.

答 $Z=\frac{X-5}{6}$ とおくと. Z は $N(0,1)$ に従い.

$P(3<X<8)=P\left(\frac{3-5}{6}<Z<\frac{8-5}{6}\right)\fallingdotseq P(-0.33<Z<0.50)$

$=0.1293+0.1915=0.3208$ である

問題 X が $N(2,16)$ に従うとき,

(1) $P(0<X<2)$

(2) $P(X\leqq c)=0.329$ となる c を求めよ.

答 $Z=\frac{X-2}{4}$ とすれば, Z は $N(0,1)$ に従う.

(1) $P(0<X<2)=P\left(\frac{0-2}{4}<Z<\frac{2-2}{4}\right)=P(-0.5<Z<0)=0.1915$

(2) $P(X\leqq c)=P\left(Z<\frac{c-2}{4}\right)=0.329=\frac{1}{2}-0.171$.

ここで、$P(0<Z<d)=0.171$ となる d は 0.4427 より、

$\frac{c-2}{4}=-0.4427$, $\therefore\ c=2-1.7708=0.2292$ となる

再生性と中心極限定理

証明はしないが、以下の3つの定理が成り立つ.

定理1.8.3

互いに独立な X_1 と X_2 が $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従うとき.

$a_1X_1+a_2X_2$ は $N(a_1\mu_1+a_2\mu_2,\ a_1^2\mu_1^2+a_2^2\mu_2^2)$ に従う.

定理1.8.4

互いに独立な $X_1,\cdots,X_n$ が全て $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき.

(i) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ は $N(n\mu,\ n^2\sigma^2)$ に従う.

(ii) $\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ は $N(\mu,\ \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う.

定理1.8.5

互いに独立な $X_1,\cdots,X_n$ が全て $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ であるとき.

nが十分大きければ、

(i) $X_1+\cdots+X_n$ は ほぼ $N(n\mu,\ n^2\sigma^2)$ に従う.

(ii) $\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ は ほぼ $N(\mu,\ \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う.

なお、$n\geqq 50$ くらいであれば、この定理を使ってよい.

例. サイコロを420回 (= 35×12) 投げたとき、平均値 $\overline{X}$ が

3.4以上3.6以下である確率を求めよ.

答. 1回投げたときを X とすると $E(X)=\frac{7}{2}$, $V(X)=\frac{35}{12}$ だったので.

$\overline{X}$ は ほぼ $N\left(3.5, \frac{1}{420}\cdot\frac{35}{12}\right)=N\left(3.5, \left(\frac{1}{12}\right)^2\right)$ に従う.

$\therefore Z=\dfrac{\overline{X}-3.5}{\frac{1}{12}}$ とすると. $N(0,1)$ に従い.

$P(3.4 \leqq \overline{X} \leqq 3.6) = P\left(\dfrac{3.4-3.5}{\frac{1}{12}} \leqq Z \leqq \dfrac{3.6-3.5}{\frac{1}{12}}\right) = P(-1.2 \leqq Z \leqq 1.2)$

$= 2\times 0.3849 = 0.7698$ である

問題. コイン投げをし表が出たら1, 裏が出たら0とする.

100回投げたときの平均値 $\overline{X}$ が 0.4以上0.6以下の確率を求めよ.

答. 1回の試行を X とすると $E(X)=0.5$, $V(X)=0.25$ より

$\overline{X}$ は ほぼ $N\left(0.5, \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{4}\right)$ に従う.

$\therefore Z=\dfrac{\overline{X}-0.5}{\frac{1}{20}}$ とすれば. $N(0,1)$ に従い.

$P(0.4 \leqq \overline{X} \leqq 0.6) = P\left(\dfrac{0.4-0.5}{\frac{1}{20}} \leqq Z \leqq \dfrac{0.6-0.5}{\frac{1}{20}}\right) = P(-2 \leqq Z \leqq 2)$

$= 2\times 0.4773 = 0.9546$ である.