定理1.7.1. XとYが独立なら次が成り立つ.

(1) $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

(2) $\gamma(X, Y)=0$

(3) $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

∵ 離散の場合だけ示す.

(1) $E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$

$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p_{i\cdot}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p_{\cdot j}\right) = E(X)E(Y)$ となる

(2) $\gamma(X, Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$

(3) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X, Y)+b^2V(Y)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ //.

大数の法則.

定理1.7.2. 確率変数 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立で,

すべてのiについて. $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ であるとする

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおけば.

(1) $E(\overline{X})=\mu$.

(2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる.

∵ (1) $E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}E(X_1)+\frac{1}{n}E(X_2)+\cdots+\frac{1}{n}E(X_n)$

$=\frac{1}{n}\times\mu\times n=\mu$.

(2). $V(\overline{X}) = V(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n) = V(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_{n-1}) + \frac{1}{n^2}V(X_n)$

$\cdots = \frac{1}{n^2}V(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2\cdot n = \frac{\sigma^2}{n}$ である.

定理1.7.3 $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ とすると. $k>1$ に対し.

$P(|X-\mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$ が成り立つ.

∵ 連続型だけ示す.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot p(x)\cdot dx$$

$$= \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\,dx + \int_{|x-\mu|<k\sigma} (x-\mu)^2\cdot p(x)\cdot dx$$

$$\geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\cdot dx \geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} k^2\cdot\sigma^2\cdot p(x)\cdot dx$$

$$= k^2\sigma^2\cdot\int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} p(x)\cdot dx = k^2\cdot\sigma^2\cdot P(|x-\mu|\geqq k\sigma)$$

$\therefore$ $P(|x-\mu|\geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$ となる.

定理1.7.4 X_i を互いに独立, $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ とする.

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ とおくと. $\varepsilon > 0$ に対し.

$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon) = 1$ となる.

∵ $P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon) = 1 - P(|\overline{X}-\mu|>\varepsilon)$

$$= 1 - P\left(|\overline{X}-\mu| > \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$

となる

例. (1) 5個のサイコロを投げ, 出た目の平均を$\overline{X}$とするとき, $E(\overline{X})$と$V(\overline{X})$を求めよ

(2) X_nをサイコロn個投げたときの平均値とすると.

$V(X_n)<\frac{1}{2}$になるには. nがいくつ以上であればよいか.

答. (1) Xをサイコロ1個投げたときの目とすると.

$E(X)=\frac{7}{2}$, $V(X)=\frac{35}{12}$ であったので.

$E(\overline{X})=\frac{7}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{1}{5}\cdot\frac{35}{12}=\frac{7}{12}$ である.

(2) $V(X_n)=\frac{35}{12}\cdot\frac{1}{n}$ より

$\frac{35}{12}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$ となるには $n>\frac{35}{6}=5.\cdots$ より. 6以上であればよい.

問題: P18(ii)を解け.

・X_nをコインn枚投げたときの表が出たコインの数$\div n$ とするとき.

$V(X_n)\leqq\frac{1}{100}$になるには. nがいくつ以上であればよいか.

答. (1). Yをコイン1枚投げたときの表(1), 裏(0) とすると.

$E(Y)=\frac{1}{2}$, $V(Y)=\frac{1}{4}$ であるので

$E(\overline{X})=\frac{1}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

(2). $V(X_n)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}$ より

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{100}$ となるには $n\geqq25$ より 25以上であればよい