問題. P44.17.(i) を解け

答 $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\cdot dy = \int_0^2 (1-x)(2-y)\,dy$

$= (1-x)\cdot\left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 2(1-x)$ （$0 \leqq x \leqq 1$ のとき. その他は $p_1(x)=0$）

$p_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_0^1 (1-x)(2-y)\,dx$

$= (2-y)\cdot\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(2-y)$ である.（$0 \leqq y \leqq 2$ のとき、その他は $p_2(y)=0$）

同時確率があると. $aX+bY$ のような確率変数を考えることができる.

これは. $X = x_i$, $Y = y_j$ である確率が p_{ij} なので.

$aX+bY$ が $ax_i + by_j$ の値をとる確率が p_{ij} ということ.

定義 1.6.1. 次で定義される $\gamma(X,Y)$, $\rho(X,Y)$ を

それぞれ. 共分散, 相関係数 という.

共分散 : $\gamma(X,Y) = E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))$

相関係数 : $\rho(X,Y) = \gamma(X,Y) \,/\, \sigma(X)\cdot\sigma(Y)$.

注意. 相関係数は. XとYの相関を表す.一つの指標になる.(完全に表すわけではない)

例えば. XとYが独立なら $\rho(X,Y)=0$ となる.

また $-1 \leqq \rho(X,Y) \leqq 1$ （定理 1.6.3）であるが.

$|\rho(X,Y)|$ が 1 に近いほど相関が強いと考えられる.

例. 1本のあたりが入ったn本のくじの中から. Aさん Bさんがくじをひく.

XとYを. Aさん Bさんがあたりをひくとき 1, はずれをひくとき 0 とおくとき.

$\rho(X,Y)$ を計算する.

まず. $E(X)=\frac{1}{n}$, $E(Y)=\frac{1}{n}$.

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{n}+0^2\cdot\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$, $V(Y)=\frac{n-1}{n^2}$ である.

$x_1=0, x_2=1, y_1=0, y_2=1$ とすると.

$p_{11}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}=\frac{n-2}{n}$, $p_{21}=\frac{1}{n}\cdot 1=\frac{1}{n}$ $p_{12}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$, $p_{22}=0$ より.

$$\gamma(X,Y)=\frac{n-2}{n}\left(0-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(0-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(0-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(0-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(n-2-(n-1)-(n-1)\right)=-\frac{1}{n^2}$$

$\therefore \rho(X,Y)=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{n-1}=-\frac{1}{n-1}$ である.

くじが2本 $\Rightarrow \rho(X,Y)=-1$. くじが多数 $\Rightarrow \rho(X,Y)=-\frac{1}{n-1}\to 0$ となる

相関が強い 相関が弱い.

定理 1.6.2. X, Yを確率変数. a, bを定数とすると.

(i) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

(ii) $\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

(iii) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$

$\because$ 離散の場合だけ示す.

(i). $E(aX+bY)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)p_{ij}=\sum_i ax_i\sum_j p_{ij}+\sum_j by_j\cdot\sum_i p_{ij}$
$=a\cdot\sum_i ax_i\cdot p_{i\cdot}+b\sum_j by_j\cdot p_{\cdot j}=aE(X)+bE(Y)$

(ii) $\gamma(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$
$=E(XY-E(X)\cdot Y-E(Y)\cdot X+E(X)\cdot E(Y))$
$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)-E(X)\cdot E(Y)+E(X)\cdot E(Y)$
$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

(iii) $V(aX+bY)=E((aX+bY-E(aX+bY))^2)$

$=E((aX-aE(X)+bY-bE(Y))^2)$

$=E((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))^2)$

$=E(a^2(X-E(X))^2+2ab(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))+b^2(Y-E(Y))^2)$

$=a^2V(X)+2ab\,\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$

確率変数の独立性.

XとYを離散型とし.

事象 A_i : $X=x_i$, 事象 B_j : $Y=y_j$ とする.

このA_iとB_jが全てのi,jについて独立なとき. XとYは(互いに)独立な確率変数という.

$p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ となることが.

XとYが独立になる必要十分条件になる. 連続型の場合は.

$p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$ が独立になる条件である.

例. $p(x,y)=\begin{cases}(1-x)(2-y) & (0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 2)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ であるとき. XとYは独立になる.

$\because$ $p_1(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0\leqq x\leqq 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ $p_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-y) & 0\leqq y\leqq 2\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ より $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$.

問題 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 2)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ のとき. XとYは独立かしらべよ.

答. $0\leqq x\leqq 1$ のとき. $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\cdot dy=\int_0^2\frac{1}{2}dy=1$. その他は $p_1(x)=0$.

$0\leqq y\leqq 2$ のとき. $p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\cdot dx=\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$, その他は $p_2(y)=0$.

$\therefore$ $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$ なので. XとYは独立である.