分散.

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ を X の分散といい.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差という.

離散 : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$

連続 : $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot p(x) \cdot dx$ である.

分散は確率密度関数が.

期待値のそばで高い値をとる $\longrightarrow$ 分散が低い.

期待値から遠くに広がっている $\longrightarrow$ 分散が高い.

$\longrightarrow$ 散布度・確率の広がり具合を表している.

定理 1.5.3. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\because$ $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + E(X)^2)$

$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

例. トランプをひいたときの数を X とするとき. 分散と標準偏差を求めよ.

答. $E(X) = 7$ であった.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{13} + 2^2 \cdot \frac{1}{13} + \cdots + 13^2 \cdot \frac{1}{13} - 49$

$= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 - 49 = 63 - 49 = 14$.

$\therefore$ $\sigma(X) = \sqrt{14}$ である

__問題__ (1) サイコロをふって出た目が X であるとき.
分散と標準偏差を求めよ.

(2). $p(x)=\begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ で確率密度関数が与えられているとき $V(X)$, $\sigma(X)$ を求めよ.

答 (1) $E(X)=\frac{7}{2}$ であったので.

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\,6\cdot7\cdot13-\frac{49}{4}=\frac{1}{12}(182-147)=\frac{35}{12}.$$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}} \fallingdotseq (1.7)$ である.

(2) $E(X)=\frac{1}{2}$ であったので.

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p(x)\,dx-\frac{1}{4}$$
$$=\int_0^1 -6x^4+6x^3\,dx-\frac{1}{4}=-\frac{6}{5}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{20}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ である.

__定理 1.5.4.__ a を定数とするとき.

(1) $V(X+a)=V(X)$, $\sigma(X+a)=\sigma(X)$

(2) $V(aX)=aV(X)$, $\sigma(aX)=a\cdot\sigma(X)$

∵ (1) $V(X+a)=E((X+a-E(X+a))^2)=E((X+a-E(X)-a)^2)$
$=E((X-E(X))^2)=V(X)$

(2) $V(aX)=E((aX-E(aX))^2)=E((aX-a\cdot E(X))^2)$
$=a^2E((X-E(X))^2)=a^2V(X)$

確率変数 X に対し、確率変数 Z を、

$Z = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ とおくと、$E(Z)=0$, $V(Z)=1$ となる。

この Z をとることを、X の標準化という。

同時確率分布

X、Y を離散型とし、それぞれ、x_i, y_j $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ の値をとるとき、

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

を X と Y の同時確率という。この p_{ij} は、

(i) $0 \leqq p_{ij} \leqq 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$ をみたす。また、

$p_{i\cdot}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ を

x_i がおこる確率　　y_i がおこる確率

それぞれ X、Y の周辺確率という。さらに、これらは、

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{i\cdot}=1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{\cdot j}=1$ をみたす。

また、X、Y が連続型の場合、確率密度関数は、2変数関数 $p(x,y)$ で与えられ、

$P(a\leqq X\leqq b,\ c\leqq Y\leqq d)=\displaystyle\int_a^b\int_c^d p(x,y)\,dy\,dx$ となる。

この $p(x,y)$ は同時確率密度関数という。この $p(x,y)$ は、

(i) $p(x,y)\geqq 0$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx=1$ をみたす。また、

$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \cdot dy$, $p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx$ を.

Xの確率密度関数　　Yの確率密度関数

それぞれ、X, Yの周辺確率密度関数という。このとき.

$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b p_1(x)\,dx$,　$P(a \leqq Y \leqq b) = \int_a^b p_2(y)\,dy$

$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} p_2(y)\,dy = 1$ をみたす.

P20. 例1. サイコロの目をX, コインの裏(0) 表(1) をYとすると. 同時確率は.

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{12}$ $(i=1,\cdots,6, j=1,2)$ である. また.

$p_{i\cdot} = \sum_{j=1,2} p_{ij} = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{6} p_{ij} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ である.

問題. サイコロA, Bを投げ、Aの目をX, Bの目をYとするとき、

XとYの同時確率および、周辺確率を求めよ.

答. $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $(i,j = 1,\cdots,6)$

$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{6} p_{ij} = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$, $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{6} p_{ij} = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ である.

P43. 5(i)(ii) を解け.

(i). $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ とすると.

$p_{1\cdot} = \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{7}{20}$, $p_{2\cdot} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$, $p_{3\cdot} = \frac{5}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$

(ii) $p_{\cdot 1} = \frac{3}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{3}{5}$, $p_{\cdot 2} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$ である

(表は略)