連続型確率変数と確率密度関数

例えば、カンビールの内容量や、ダーツのあたる場所などは連続的な数値をとる。

このような量を 連続型の確率変数 という。

連続型の確率変数は、とりうる値が無限個あるので、ちょうどある1つの値をとる確率は、

$P(X=x)=0$ となってしまう。なので、かわりに、

$P(x \leqq X \leqq x+\Delta x)$ を考えてみる

Δx ← ちょっとの幅

この Δx がすごく小さいときは、その近辺で確率が一定と考えて、

$$P(x \leqq X \leqq x+\Delta x) = p(x) \cdot \Delta x$$

と考える。ここで $p(x)$ は x が起こる確率ではなく、"点 x の近くの単位長さあたりの出現確率" である。

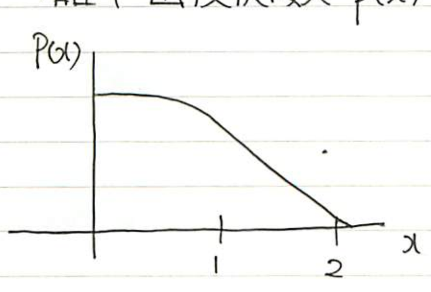
この $p(x)$ を 確率密度関数 という。これを用いると、

X のとる値が任意の区間 $[a, b]$ に入る確率は、

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b p(x)\,dx$$ で与えられる。

例. ダーツをある点Tに向かってなげたとき、ささった点とTとの距離を X とするとき、

確率密度関数 $p(x)$ は例えば次のようなグラフになる



ここで、ダーツがTから距離1以下の点に当たる確率は積分を使って、

$$\int_0^1 p(x)\,dx$$ で与えられる。

→ $P(x)$ は確率ではなく、積分することで確率を与える関数である。

p(x)は次の条件をみたす

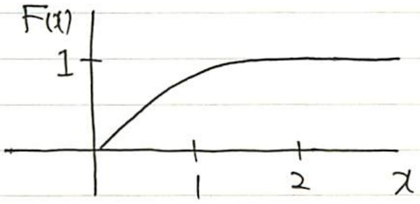
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\cdot dx = 1.$$

また連続型確率変数の場合，分布関数F(x)は.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\cdot dt$$ で与えられる

↑x以下になる確率

さきほどの例なら．分布関数は



のような関数になる．

また、次の関係が成り立つ

$$P(a \leqq X \leqq b) = F(b) - F(a)$$

$$p(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

P13．例1．一様分布の説明．

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqq x \leqq b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$ で確率密度関数が与えられるとき．

これを区間[a, b]における一様分布という．

p(x)，F(x)は 図1.4.3，1.4.4 の通り．

P14．例2．

(i)．$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\cdot dx = \int_0^1 ax(1-x)\cdot dx = a\cdot\int_0^1 x - x^2\,dx$

$= a\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}a$　　∴ $a = 6$．　図は略．

(ii). $P(\frac{1}{4} \leqq X < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6x(1-x)\,dx = 6\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{32}$

(iii). $x \leqq 0$ のとき $F(x)=0$ ， $x \geqq 1$ のとき，$F(x)=1$.

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)\cdot dt = 6\cdot\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^x = 3x^2 - 2x^3$ である.

P15. 問1.

(i) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^5 C\,dx = \frac{1}{3} + 4C$ ∴ $C = \frac{1}{6}$

(ii) $P(\frac{1}{2} \leqq X < 4) = \int_{\frac{1}{2}}^{4} p(x)\cdot dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{6}\,dx$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ である

(iii) $x \leqq 0$ のとき. $F(x)=0$ ， $x \geqq 5$ のとき $F(x)=1$.

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}x$.

$1 \leqq x \leqq 5$ のとき.

$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{3}dt + \int_1^x \frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$.

P15. 問2.

誤差は 0 から 0.5 の間 で. その確率密度は等しいとしてよいので.

(i) $p(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$.

(ii) $P(0 \leqq X \leqq 0.1) = \int_0^{0.1} 2\,dx = 0.2$ である