ベイズの定理.

事象 A, B に対し.　$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ とできるので.

定理 1.2.1 と排反の条件から

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$

これを一般化すると. 次の定理を得る.

定理 1.2.3.

事象 $A_1, \cdots, A_n$ が互いに排反で、 $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ であるとき.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) P(B|A_n)$$ となる.

∵ $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$ より

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) =$ 右辺　となる.

条件付き確率 $P(B|A)$ は. A を原因, B を結果と考えれば.

原因と結果の因果関係の強さを表しているともいえる.

定理 1.2.4. (ベイズの定理). 事象 B を引き起こす原因として. $A_1, \cdots, A_n$ が考えられ. これらは排反とする. このとき. B が起こった原因が A_k である確率 $P(A_k|B)$ は.

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) P(B|A_n)}$$ である.

∵ $P(A_k \cap B) = P(B \cap A_k)$ より

$P(B) \cdot P(A_k|B) = P(A_k) \cdot P(B|A_k)$ とできる.

両辺を $P(B)$ でわり. 定理 1.2.3 を使えばよい

P7・例5

事象A,B,Cを それぞれ とり出したクッキーが a,b,c の作ったもの という事象とする。

事象Eを 割れクッキーをとる事象とすると、

$$P(A|E)=\frac{P(A)\cdot P(E|A)}{P(A)\cdot P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)\cdot P(E|C)}$$

$$=\frac{0.35\times0.08}{0.35\times0.08+0.4\times0.05+0.25\times0.03}=\frac{280}{555}=\frac{56}{111}$$ である。

P8・問1

事象X,Y,Zをそれぞれ A,B,C社からの製品である事象とし、

事象Wを不良品を取る事象 とすると、

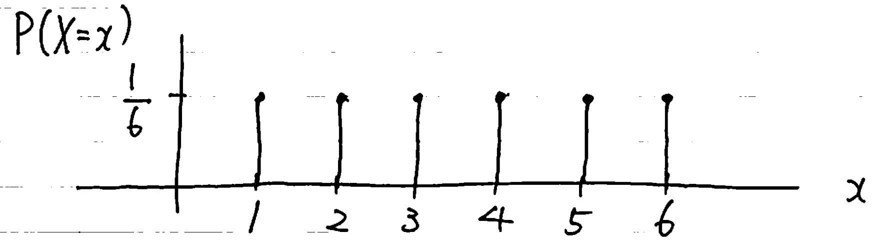
$$P(A|W)=\frac{0.4\times0.02}{0.4\times0.02+0.3\times0.04+0.3\times0.05}=\frac{8}{35}$$ である。

離散型確率変数と確率分布

サイコロなげで 出る目の数をXとする

Xのとりうる値と その確率を表・グラフにすると次のようになる。

X	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



このように、事象を変数に対応させるとき、この変数を確率変数という。

特にこの例のように、変数がとびとびの値をとるとき、離散型という。

一般に、確率変数 X がとり得る値 x_i $(i=1,\cdots,n)$ と、

それが出現する確率 $p_i = P(X=x_i)$ との対応関係を確率分布という。

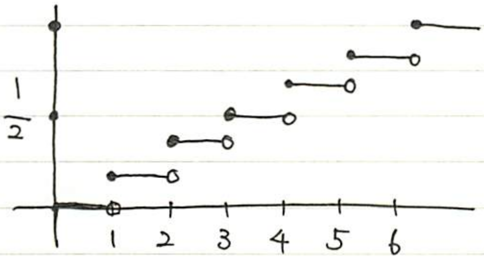
→表1.3.2，図1.3.2 のように表せる。

X の確率分布 $P(X=x_i)=p_i$ に対し、

$$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{x_i \leqq x} p_i \quad \longleftarrow X \text{が} x \text{以下である確率}$$

で定義される関数を X の分布関数という。

サイコロ投げの例の分布関数は、



というグラフになる。

例えば、$F(2.5)$ はサイコロの目が 2.5以下になる確率なので、

$$F(2.5) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{3}$$ となる。

$F(x)$ は必ず非減少関数になり、

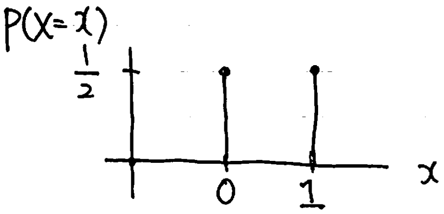
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$ をみたす。

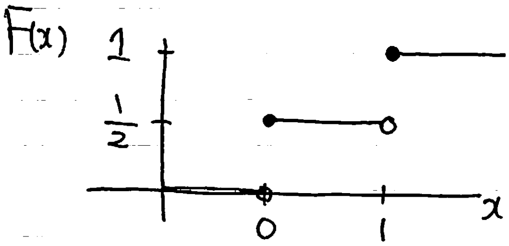
また、分布関数から、確率分布を求めることもできる。

$$\begin{cases} p_1 = F(x_1) \\ p_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i) \quad (i=1,\cdots,n-1,\ x_{i+1} > x_i) \end{cases}$$

P11. 問1.

X	0	1
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



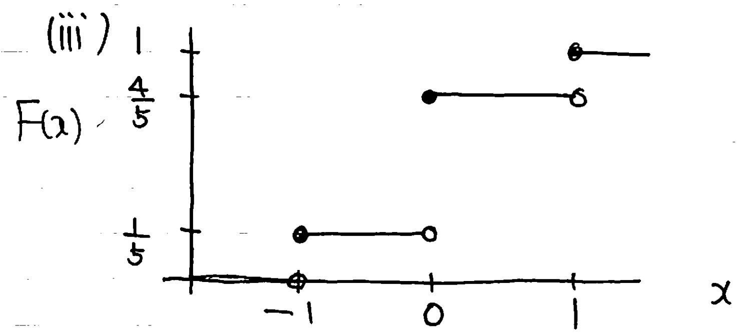


P11. 問2.

(i) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+P=1$ より $P=\frac{1}{5}$

(ii). $P(X^2=1)=P(X=1)+P(X=-1)=\frac{2}{5}$.

(iii)



である