母数の検定の一般形式

未知の母数θと具体的な数θ_0の大小関係を考えたときに.
主張されることがらを統計的仮説という.具体的には.

(a) $\theta > \theta_0$　(b) $\theta < \theta_0$　(c) $\theta \neq \theta_0$　(d) $\theta = \theta_0$

の4つである.統計的仮説の真偽を標本の結果に基づいて判定することを.
統計的仮説検定あるいは検定という.

検定の方法

(1) とりあえず、主張 (d) $\theta = \theta_0$ を認める.
これを帰無仮説といい H_0 で表す　(前回の例では $H_0 : \theta = 250$)

(2) これに対し.(1)と対立する仮説を(a)~(c)から1つ選ぶ
これを対立仮説といい H_1 で表す　(例では $H_1 : \theta < 250$)

(3) θを予想できる統計量Θを決める.これを検定統計量という
(例では $\overline{X}$ または Z)

(4) 小さな正の値αを決める.αは 0.1, 0.05, 0.01 が一般的.
このαを有意水準または危険率という.このαをもとに.H_1に応じて.
例えば (b) $\theta < \theta_0$ の場合であれば.

$P(\Theta < \theta(\alpha)) = \alpha$　をみたす $\theta(\alpha)$ を求める.

これから得られる領域 $\Theta < \theta(\alpha)$ を.対立仮説H_1に対する有意水準αの棄却域という
(例では. $\alpha = 0.05$, $\theta(\alpha) = 248.3$)

(5) Θの実現値を計算する　(例では $\Theta = 248.2$)

(6) Ⓗ が棄却域にあるとき，帰無仮説 H_0 は棄却，対立仮説 H_1 が採択される．

このとき，α 有意水準では Ⓗ と θ_0 に有意差があるという．(Ⓗ は θ_0 より有意に小さい)

逆に Ⓗ が棄却域になければ，H_0 が採択される．このとき，Ⓗ と θ_0 に有意差はないという．

とくに，(a),(b),(c) を，右側，左側，両側 検定 という

母平均の検定．

例．直径 5mm のナットを生産するために試作した 100個を調べたら，

平均 4.998 mm，標準偏差 0.009mm であった．この製作方法で規格値より

小さくなるか，有意水準 5% で検定せよ．

答．(1) H_0 : 母平均 $\mu = 5\text{mm}$

(2) H_1 : 母平均 $\mu < 5\text{mm}$

(3) $\bar{X}$ を標本平均 とすると．$\bar{X}$ は $N(\mu, \frac{(0.009)^2}{100})$ に従うとしてよい．ここで，

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{0.009}{10}} = \frac{\bar{X} - \mu}{0.0009}$$ とすれば Z は $N(0,1)$ に従う．

この Z を検定統計量 とする

(4) $P(Z < \theta(0.05)) = 0.05$ より．$\theta(0.05) = -1.6449$ となり．

棄却域は $Z < -1.6449$ である

(5) Z の実現値は

$$Z = \frac{4.998 - 5}{0.0009} \fallingdotseq -2.22$$ である

(6) Z の実現値は棄却域に入るので．H_0 は有意水準 5% で棄却される．

⟶ つまり製造方法をかえた方がよい．

問題 P122 問1, 問3を解け

答 問1

(1) H_0：母平均 $\mu = 12.6$

(2) H_1：母平均 $\mu > 12.6$

(3) $\overline{X}$を標本平均とすると $\overline{X}$は $N\left(\mu, \frac{(1.8)^2}{20}\right)$ に従うとしてよい. ここで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{1.8}{\sqrt{20}}} = \frac{\sqrt{20}}{1.8}(\overline{X} - \mu)$$ とすればZは $N(0,1)$ に従う.

このZを検定統計量とする

(4) $P(Z > \theta(0.05)) = 0.05$ より $\theta(0.05) = 1.6449$ となり

棄却域は $Z > 1.6449$ である

(5) Zの実現値は

$$Z = \frac{\sqrt{20}}{1.8}(13.2 - 12.6) \fallingdotseq 1.49$$

(6) Zは棄却域にないので、H_0は棄却されない.

答 問3. (1) $H_0 : \mu = 49.4$. (2) $H_1 : \mu < 49.4$.

(3) $\overline{X}$を標本平均とすると $\overline{X}$は $N\left(\mu, \frac{(6.91)^2}{200}\right)$ に従うとしてよい. ここで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{6.91}{\sqrt{200}}} = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{6.91}(\overline{X} - \mu)$$ とするとZは $N(0,1)$ に従う. これを検定統計量とする

(4) さきほどと同様に棄却域は $Z < -1.6449$

(5) 実現値は $Z = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{6.91}(48.2 - 49.4) \fallingdotseq -2.46$

(6) H_1が採択され. 下まわるといってよい.