§2 距離空間

定義 2.1.

集合 X を空でないとし．$d: X \times X \to \mathbb{R}$ が次の4条件をみたすとき，

d を距離関数 (metric)，$d(x, y)$ $(x, y \in X)$ を x と y の距離 (distance)

(X, d) の組を距離空間 (metric space) という

(i) ${}^\forall x, y \in X$ に対し．$d(x, y) \geqq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) ${}^\forall x, y \in X$ に対し．$d(x, y) = d(y, x)$

(iv) ${}^\forall x, y, z \in X$ に対し．

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{三角不等式})$$

例．(1)．空でない集合 X の ${}^\forall x, y \in X$ に対し．

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$ とすれば，これは metric になる．

(2) $\mathbb{R}^2$ において．$x = (x_1, x_2)$，$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し．

$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ とすれば これは metric になる．

(3)．$\mathbb{R}^2$ において

$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ とすれば これは metric になる

(4) $\mathbb{R}^2$ において．

$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$ とすれば，これは metric になる．

(2)が metric になる証明.

(i),(ii),(iii)は定義から明らか.

(iv) $\sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2} \leqq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$ を示せばよいが,

$a_1=x_1-y_1,\ a_2=x_2-y_2,\ b_1=y_1-z_1,\ b_2=y_2-z_2$ とおくと.

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leqq \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ とできる.

両辺2乗して.

$a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2 \leqq a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$

$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

$a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2 \leqq a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2$.

$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqq 0$ となるので示された.

問. 例の(3),(4)が metric であることを示せ.

点列の収束.

metric sp. (X, d) において.点列の収束を考える.

定義2.2.

X の点列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは.

$\forall \varepsilon>0$ に対し. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $n \geqq n_0 \Rightarrow d(a, a_n)<\varepsilon$

のときをいう.

このとき $\lim a_n = a$, もしくは $a_n \longrightarrow a\ (n\to\infty)$ とかく

例 (1) $\mathbb{R}$ において. $d(x,y)=|x-y|$ とする.

$a_n=\frac{1}{n}$ とすれば、 $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ である.

(2) $d(x,y)=\begin{cases} 1 & (x\neq y) \\ 0 & (x=y) \end{cases}$ で与えられているとき.

$a_n\to a$ $(n\to\infty)$ $\Leftrightarrow$ $^\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq n_0 \Rightarrow a_n=a$ である.

(3). $(\mathbb{R}^2, d_1)$ において $a_n\to a$ $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{R}^2, d_2)$ において $a_n\to a$.

(2)の証明.

$(\Leftarrow)$ は明らか.

$(\Rightarrow)$ $\varepsilon=\frac{1}{2}$ とおくと. $^\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq n_0 \Rightarrow d(a_n,a)<\frac{1}{2}$.

これは. $d(a_n,a)=0$ なので、 $a_n=a$ となる.

(3)の証明. $(\Rightarrow)$ だけ.

$a_n=(x_n, y_n)$, $a=(x,y)$ とすると.

$^\forall\varepsilon>0$ に対し. $^\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geqq n_0 \Rightarrow |x_n-x|+|y_n-y|<\varepsilon$. である.

$\therefore |x_n-x|<\varepsilon, |y_n-y|<\varepsilon$.

ここで、$^\forall 2\varepsilon>0$ に対し. 上の n_0 を使うと. $n\geqq n_0$ ならば.

$\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon < 2\varepsilon$ となるので.

$(\mathbb{R}^2, d_2)$ において $a_n\to a$ である.

問 (1) と (3)の$(\Leftarrow)$ を示せ.