# §5. ヒルベルト空間のテンソル積

## 同値関係と同値類

定義5.1. 集合 $X$ のにおいて次をみたす関係"$\sim$"を同値関係という.

$\forall a, b, c \in X$ に対し

(1) $a \sim a$　　(2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(3) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

例. (1) 整数 $\mathbb{Z}$ において. 等号関係"$=$"は同値関係である

(2) 整数 $\mathbb{Z}$ において, 不等号"$\leqq$"は同値関係でない.

(3) 整数 $\mathbb{Z}$ において,

$a \sim b \Leftrightarrow a-b$ が $9$ の倍数　とすると同値関係となる.

$\because$ (1) $a-a=0$ は $9$ の倍数より $a \sim a$.

(2) $a-b$ が $9$ の倍数なら $b-a=-(a-b)$ も $9$ の倍数 $\therefore b \sim a$

(3). $a-c=(a-b)+(b-c)$ は $9$ の倍数になるので, $a \sim c$.

定義5.2. $\sim$ を $X$ の同値関係とするとき, $\forall a \in X$ に対し.

$[a]=\{b \in X \mid a \sim b\}$ を $a$ の同値類という.

また. $a$ を $[a]$ の代表元という.

例. 先ほどの(3)を考えると

$[0]=\{0, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \cdots\}=\{9n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$[1]=\{1, 10, 19, -8, -17, \cdots\}=\{9n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.　となる.

また $[1]$ の代表元として. 1以外に $10$ や $-17$ をとってもよい

**命題5.3.** 同値類について次のことが成り立つ.

(1) $a \in [a]$

(2) $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$

(3) $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \phi$.

∵ (1). $a \sim a$ より明らか.

(2). $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ なので.

$$[b] = \{c \in X \mid b \sim c\} = \{c \in X \mid a \sim c\} = [a]$$

(3) もし. $[a] \cap [b] \ni c$ とすれば.

$a \sim c,\ b \sim c$ より $a \sim b$ となり $[a] = [b]$ となる.

**定理5.4.** $\sim$ を $X$ の同値関係とすると.

$X$ は異なる同値類 $[a_1], \cdots, [a_n]$ で分割される.

## 同値類上の計算

例(3)を考える. 例えば. 同値類 $[1]$, $[2]$ に対し.

$[1] + [2] = [3]$ という計算は可能だろうか?

→ 代表元のとり方に依らず. 計算結果が定まれば. できる.

$[1]$ の代表元は $9n+1$ とでき. $[2]$ の代表元は $9m+2$ とできる.

なので. この和は $9n+1+9m+2 = 9(n+m)+3 \in [3]$ となり

計算結果が $n$ と $m$ によらないため, 計算可能.

ダメな例として $[0]\div[3]$ がある.

代表元として $[0]\ni 0$, $[3]\ni 3$ とした場合, $[0]\div[3]=[0]$ となるが

代表元として $[0]\ni 9$, $[3]\ni 3$ とすれば, $[9]\div[3]=[3]$ となり

計算結果が変わってしまう.

ヒルベルト空間のテンソル積

簡単のため $\dim H<+\infty$ としておく. 集合 $X$ として

$$X=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i, y_i)\ \middle|\ a_i\in\mathbb{C},\ x_i, y_i\in H,\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$ を考える.

$X$ には自然な和とスカラー倍を入れることで, ベクトル空間になる. $(\dim X=\infty)$

この $X$ に次で同値関係を与える.

(i) $a(x, y)\sim(ax, y)\sim(x, ay)$

(ii) $(x_1+x_2, y)\sim(x_1, y)+(x_2, y)$

(iii) $(x, y_1+y_2)\sim(x, y_1)+(x, y_2)$

さらに. $X$ の同値類 $[\sum a_i(x_i, y_i)]$ を全てあつめたものを

$H\otimes H$ とかき. $H$ と $H$ のテンソル積という.

また同値類 $[\sum a_i(x_i, y_i)]=\sum a_i\cdot x_i\otimes y_i$ とかく.

$H\otimes H$ には自然に和とスカラー倍が定義されベクトル空間になる.

定理 5.5. $\{e_i\}_{i=1}^n$ を $H$ の基底とすると. $\{e_i\otimes e_j\}_{i,j=1}^n$ は $H\otimes H$ の

基底になる. とくに $\dim H\otimes H=n^2$.

∵ $H\otimes H \ni \left[\sum_{i=1}^{k} a_i(x_i, y_i)\right] = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot x_i \otimes y_i$ を考える.

$x_i, y_i \in H$であるので $\{e_i\}$ を使って.

$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot e_j \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} e_j \quad (x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{C})$ とできる

ここで、$\sum a_i x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot e_j\right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \cdot e_l\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot x_{ij} \cdot y_{il}\right) \cdot e_j \otimes e_l$ となるので.

$H\otimes H$は $\{e_i \otimes e_j\}$ によって生成されている

証明はしないが. $\{e_i \otimes e_j\}$ が1次独立になることもわかるため.

$\{e_i \otimes e_j\}$は基底になることがわかる

この $H\otimes H$に内積を次で定義する

$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \cdot \langle y_1, y_2 \rangle$

するとこれは内積の条件をみたす.

定理5.6 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ を $H$の CONSとするとき.

$\{e_i \otimes e_j\}$ は $H\otimes H$の CONS になる.

⟶ テンソル積は 2つの ヒルベルト空間を結合させた空間 になる.