ベクトル関数の微分と積分

変数 t $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に対し、ベクトル $a(t)$ が定まるとき、$a(t)$ をベクトル関数という。

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ と成分表示することができ、それぞれの成分は

t の関数 とみることができる。

全ての t で $a(t) = b$ となるベクトルを定ベクトル

全ての t で $|a(t)| = 1$ となるベクトル関数を単位ベクトル関数という。

全ての t で $a(t) \perp b(t)$ となるとき、2つのベクトル関数は直交しているという。

ベクトル関数 $a(t)$ に対し、Δt を t の増分とするとき、

$$\frac{da(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta(t)} \left(a(t+\Delta t) - a(t) \right)$$

が存在するなら、これを $a(t)$ の t における微分係数といい、

$\frac{da(t)}{dt}$, $a'(t)$, $\dot{a}(t)$ などで表す。

さらに、全ての $a'(t)$ が存在するとき、$a'(t)$ を $a(t)$ のベクトル導関数という。

"$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ がベクトル導関数をもつ" ことと、

"$a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ が微分可能である" ことは同値である。

このとき、$a'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t))$ である。

高階の微分も同様に定義できる。

例題. $a(t) = (1, t, t^2)$ について、$a'(t)$ と $|a'(t)|$ を求めよ

答 $a'(t) = \left(\frac{d}{dt}1, \frac{d}{dt}t, \frac{d}{dt}t^2 \right) = (0, 1, 2t)$

$|a'(t)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (2t)^2} = \sqrt{4t^2+1}$ である

問題. $a(t)=(\cos t, \sin t, t)$ について.

$a'(t), |a'(t)|, a''(t), |a''(t)|$ を求めよ.

答 $a'(t)=(-\sin t, \cos t, 1)$ $|a'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$a''(t)=(-\cos t, -\sin t, 0)$ $|a''(t)|=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}=1$ である.

変数 t に対し. 点 $P(t)=(x(t), y(t), z(t))$ が定まるとき,

その位置ベクトル $r(t)=(x(t), y(t), z(t))$ はベクトル関数になる.

一般に点 $P(t)$ は曲線 C をえがき、$r(t)$ を曲線 C のベクトル方程式という.

ここで、$r'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$ は曲線 C の接線の方向ベクトルになるので、

曲線 C の点 $P(t)$ における接線ベクトルという

また. $r'(t)=0$ となる点を. 曲線 C の特異点という.

見方を変えて、$P(t)$ が運動する物だと考えると.

$v(t)=r'(t)$ は 速度ベクトル

$a(t)=a'(t)$ は 加速度ベクトル

$|v(t)|$ は 速度 になる.

定理 2.1. $a(t), b(t), c(t)$ はベクトル関数, k は定ベクトル.

$f(t)$ は t の関数 とすると. 次が成り立つ.

(1) $k'=0$

(2) $(a(t)+b(t))'=a'(t)+b'(t)$

(3). $(f(t)\cdot a(t))'=f'(t)\cdot a(t)+f(t)\cdot a'(t)$

(4) $(a(t)\cdot b(t))'=a'(t)\cdot b(t)+a(t)\cdot b'(t)$, $(|a(t)|^2)'=2a(t)\cdot a'(t)$

(5) $(a \times b)' = a' \times b + a \times b'$

(6) $|a\ b\ c|' = |a'\ b\ c| + |a\ b'\ c| + |a\ b\ c'|$

☺ (3)〜(6)のみ示す　((1), (2)は略)

(3) $(f(t) \cdot a(t))' = ((f(t) a_1(t))', (f(t) a_2(t))', (f(t) \cdot a_3(t))')$

$= (f'(t) \cdot a_1(t) + f(t) \cdot a_1'(t), f'(t) \cdot a_2(t) + f(t) \cdot a_2'(t), f'(t) \cdot a_3(t) + f(t) \cdot a_3'(t))$

$= f'(t) \cdot a(t) + f(t) \cdot a'(t)$

(4) $(a \cdot b)' = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)'$

$= a_1' \cdot b_1 + a_1 b_1' + a_2' b_2 + a_2 b_2' + a_3' b_3 + a_3 b_3'$

$= a' \cdot b + a \cdot b'$

(5) $(a \times b)' = ((a_2 b_3 - a_3 b_2)', (a_3 b_1 - a_1 b_3)', (a_1 b_2 - a_2 b_1)')$

$= (a_2' b_3 - a_3' b_2,\ a_3' b_1 - a_1' b_3,\ a_1' b_2 - a_2' b_1)$

$+ (a_2 b_3' - a_3 b_2',\ a_3 b_1' - a_1 b_3',\ a_1 b_2' - a_2 b_1')$

$= a' \times b + a \times b'$

(6) $|a\ b\ c| = \{(a \times b) \cdot c\}' = (a \times b)' \cdot c + (a \times b) \cdot c'$

$= (a' \times b) \cdot c + (a \times b') \cdot c + (a \times b) \cdot c'$

$= |a'\ b\ c| + |a\ b'\ c| + |a\ b\ c'|$

例題. $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$　$b(t) = (e^t, e^{-t}, 2t)$ について.

$(a \cdot b)'$ と $(a \times b)'$ を求めよ

答. $a'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$　$b'(t) = (e^{t}, -e^{-t}, 2)$ より

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$$

$$= -e^{t} \cdot \sin t + e^{-t} \cdot \cos t + 2t + e^{t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t + 2t$$

$$= (e^{t} + e^{-t})(\cos t - \sin t) + 4t$$

$$(a \times b)' = a' \times b + a \times b'$$

$$= (2t \cdot \cos t - e^{-t}, e^{t} + 2t \sin t, -e^{-t} \cdot \sin t - e^{t} \cos t)$$

$$+ (2 \sin t + t \cdot e^{-t}, te^{t} - 2\cos t, -e^{t} \cos t - e^{t} \cdot \sin t)$$

$$= (2t \cdot \cos t + 2 \sin t + (t-1)e^{-t}, 2t \sin t - 2\cos t + (1+t)e^{t}, -(e^{t} + e^{-t})(\cos t + \sin t))$$

問題 $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $b(t) = (t, -t^{2}, t^{3})$ について.

$(a \cdot b)'$ と $(a \times b)'$ を求めよ

答 $a'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $b'(t) = (1, -2t, 3t^{2})$ より

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$$

$$= -t \cdot \sin t - t^{2} \cdot \cos t + t^{3} + \cos t - 2t \sin t + 3t^{3}$$

$$= 4t^{3} - (t^{2} - 1) \cdot \cos t - 3t \cdot \sin t$$

$$(a \times b)' = a' \times b + a \times b'$$

$$= (t^{3} \cos t + t^{2}, t + t^{3} \sin t, t^{2} \sin t - t \cdot \cos t)$$

$$+ (3t^{2} \cdot \sin t + 2t^{2}, t - 3t^{2} \cdot \cos t, -2t \cos t - \sin t)$$

$$= (3t^{2} + t^{3} \cdot \cos t + 3t^{2} \cdot \sin t, 2t + t^{3} \cdot \sin t - 3t^{2} \cdot \cos t, (t^{2} - 1) \sin t - 3t \cdot \cos t)$$

である.