例. $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x\leqq a\\ -1 & -a\leqq x<0\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ のフーリエ変換と複素形フーリエ積分を求めよ.

答. $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi.$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0} -e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a} e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{-i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\tau}-\frac{1}{i\tau}e^{ia\tau}-\frac{1}{i\tau}e^{-ia\tau}+\frac{1}{i\tau}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i\tau}\left(2-(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau})\right)$$

$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ を使った.

$$=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau}(2-2\cos a\tau)=\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{\pi}\cdot\tau}\cdot(\cos a\tau-1)$$

である. これより

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{\pi}\cdot\tau}(\cos a\tau-1)\cdot e^{i\tau x}\cdot d\tau$$

$$=\frac{i}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}(\cos a\tau-1)\cdot e^{i\tau x}\cdot d\tau$$

となる.

問題. (1) $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqq a)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & (x\geqq 0)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$ のフーリエ変換を求めよ $(a>0)$

答 (1) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi.$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[\frac{1}{-i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\tau}\left(e^{-i\tau a}-e^{i\tau a}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\tau a}-e^{-i\tau a}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\tau}\cdot\sin a\tau$$

である.

(2) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-a\xi}\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\tau)\xi}\cdot d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{a+i\tau}e^{-(a+i\tau)\xi}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\tau}$ である.

フーリエ余弦・正弦変換

定理2.2. 周期 2π の関数 $f(x)$ が.

(1) 偶関数なら. $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos nx$.

(2) 奇関数なら. $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin nx$. である.

∵ (1) $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\, dx=0$

(2) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=0$ よりわかる.

関数 f が $[0,\pi]$ で定義されているとき. $-\pi<x<0$ において.

$f(x)=f(-x)$ とおけば. $f(x)$ は偶関数になる.

このときの (1) を $f(x)$ の フーリエ余弦級数 という.

また. $f(x)=-f(-x)$ とおけば $f(x)$ は奇関数になる.

このときの (2) を $f(x)$ の フーリエ正弦級数 という.

定理5.3. $(-\infty,\infty)$ で定義された関数 f が

(1) 偶関数なら. $B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi=0$ より.

$C(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$ とすれば.

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\tau)\cdot\cos\tau x\cdot d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} C(\tau)\cdot\cos\tau x\cdot dx$ とできる

(2). 奇関数 なら $A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=0$ より

$S(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}B(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$ とすれば、

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} S(\tau)\cdot\sin\tau x\cdot dx$ とできる.

ここで、$C(\tau)$ を $f(x)$ の余弦変換、$S(\tau)$ を $f(x)$ の正弦変換 という.

また. $[0,\infty)$ で定義された関数 f に対し. $-\infty<x<0$ において.

$f(x)=f(-x)$, $f(x)=-f(-x)$ とすれば、余弦変換・正弦変換を求められる

例1. $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{a} & (0\leqq x\leqq a)\\ 0 & (x>a)\end{cases}$ のフーリエ余弦変換を求めよ.

答. $C(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_{0}^{a}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{a}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\tau}\cdot\left[-\frac{1}{\tau}\cos\tau\xi\right]_{0}^{a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\tau^2}\left(1-\cos a\tau\right)$ である.

問題. $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqq x\leqq a\\ 0 & x>a\end{cases}$ のフーリエ正弦級数を求めよ.

答. $S(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{a}\xi\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{\tau}\xi\cdot\cos\tau\xi\right]_{0}^{a}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}\int_{0}^{a}\cos\tau\xi\cdot d\xi$.

$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}a\cdot\cos\tau a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_{0}^{a}$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{a}{\tau}\cos\tau a+\frac{1}{\tau^2}\sin\tau a\right)$ である