フーリエ積分

実数$\mathbb{R}$上で定義された、周期的でない関数fのフーリエ級数を考えたい。

このために、fは、

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$　という条件をみたすとしておく。

この条件をみたすfを、絶対積分可能という。

fに対し、fを$(-l, l]$に制限したf_lを考えると、f_lのフーリエ級数を求めることができる。

そのあとで、$l \to \infty$とすれば、$f_l \to f$となり、fのフーリエ級数が求められる。

f_lのフーリエ級数は、

$$f_l(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot dx$$

であったので、

$$\begin{aligned} f_l(x) \sim & \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot dx \end{aligned}$$

である。

ここで、$\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$　とすると

$$\begin{aligned} f_l(x) \sim & \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \Delta\omega \cdot \cos\omega_n x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\omega_n \cdot x \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \Delta\omega \cdot \sin\omega_n x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\omega_n x \cdot dx \end{aligned}$$

となる。

ここで、一般に $\displaystyle\int_0^\infty g(\tau)\cdot d\tau = \lim_{l\to\infty} \overset{\Delta\omega}{\frac{1}{l}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g\Big(\overset{\omega_n}{\frac{n}{l}}\Big) \right\}$ であることを使うと、

$l\to\infty$ としたときに、

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\tau x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\tau x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$
となる。

これを $f(x)$ の フーリエ積分 という。まとめると、

<u>定理5.1</u>. 関数 f の フーリエ積分は、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\tau)\cdot\cos\tau x + B(\tau)\cdot\sin\tau x\, d\tau$$
である。ここで、

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi.$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$$
である。

フーリエ積分については、次の定理が知られている。

<u>定理5.2</u> 関数 f が絶対積分可能かつ区分的に滑らかならば、フーリエ積分は、

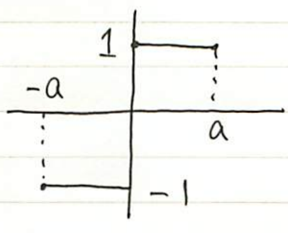
(1) $f(x)$ が連続な点では $f(x)$ に一致。

(2) 不連続な点では、$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$ に一致する。

以下、f はこの条件をみたすとする。

<u>例</u>. 次の関数のフーリエ積分を求めよ　$(a>0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0\leqq x\leqq a \\ -1 & -a\leqq x<0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



答. $f(x)$ は奇関数より

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\, d\xi = 0$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\, d\xi = 2\cdot\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$$

$$= 2\int_{0}^{a}\sin\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\left[-\frac{1}{\tau}\cos\tau\xi\right]_{0}^{a}$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\cdot\cos a\tau + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{2}{\tau}(1-\cos a\tau)$$ である

$$\therefore f(x) \sim \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\tau}(1-\cos a\tau)\cdot\sin\tau x\cdot d\tau$$ である.

問題. 次の関数のフーリエ積分を求めよ　$(a>0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqq a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

答. $f(x)$ は偶関数より

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi = 0$$

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{a}\cos\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_{0}^{a}$$

$$= \frac{2}{\tau}\cdot\sin a\tau$$ である

$$\therefore f(x) \sim \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\tau}\sin a\tau\cdot\cos\tau x\cdot d\tau$$ である

フーリエ積分を変形すると.

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi\cdot\cos\tau x + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi\cdot\sin\tau x\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot(\cos\tau\xi\cdot\cos\tau x + \sin\tau\xi\cdot\sin\tau x)\, d\xi\cdot d\tau.$$

つづく

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos(\tau x-\tau\xi)\,d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau(x-\xi)\cdot d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{0}^{\infty}\cdot\cos\tau(x-\xi)\cdot d\tau\cdot d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau(x-\xi)\cdot d\tau\cdot d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau(x-\xi)\,d\tau\,d\xi+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sin\tau(x-\xi)\cdot d\tau\cdot d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau(x-\xi)+i\sin\tau(x-\xi)\,d\tau\cdot d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdot f(\xi)\cdot e^{i\tau(x-\xi)}\cdot d\xi\cdot d\tau$$ となる.

これを $f(x)$ の複素形フーリエ積分という.

定理5.4. 関数 f に対し.

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau(\xi-x)}\cdot d\xi\,d\tau$$ とできる.

ここで. $e^{-i\tau(\xi-x)}=e^{-i\tau\xi}\cdot e^{i\tau x}$ に注意すると.次をえる.

定理5.5. 関数 f に対し.

$$F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi$$ とすると.

☆… $$f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\,e^{i\tau x}\cdot d\tau$$ とできる.

$F(\tau)$ を $f(x)$ のフーリエ変換. ☆を反転公式という.