フーリエ級数の等式，不等式.

ベッセルの不等式．周期 2π の関数 f に対し．

$S_n(x)$ をフーリエ級数の n までの和とする．すなわち．

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos kx + b_k \sin kx$$ とする．ここで．

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 \, dx$$ を考えると．

$$\text{右辺} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 - 2 \cdot f(x) \cdot S_n(x) + S_n(x)^2 \, dx \geqq$$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cdot f(x) \cdot S_n(x) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx$$

$$= 2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f(x) \cdot \cos kx + b_k \cdot f(x) \cdot \sin kx \, dx$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx \right)^2 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right)$$

$$- \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right)$$ となり．

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \cdot dx$$ をえる．まとめると．

定理4.1. $(-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数 f について．

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$ となる

とくに．f が区分的に滑らかならば．

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0$$ より．次が成り立つ．

<u>定理4.2</u> $(-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかな関数 f について．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ となる．

<u>例</u>．$f(x)=|x|$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ のフーリエ級数は．

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$ であった．一方．

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3$$ である．

ここに．パーセバルの等式（定理4.2）を適用すると．

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\right)$$ となる．

$$\therefore\ \frac{16}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{6}\pi^2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{96}\cdot\pi^4$$ となる．

<u>問題</u>．$f(x)=x^2 \sim \dfrac{\pi^2}{3} + 4\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ に

パーセバルの等式を適用して．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ を求めよ．

<u>答</u>．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\pi^5$ である

$$\therefore\ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$$ である．

注意．パーセバルの等式を使うと．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$ となり．

誤差の大きさを求めることができる．

次の2つの定理が成り立つ．

定理4.3．f が区分的に連続なら．$x\in(-\pi,\pi]$ に対し．

$$\int_0^x f(t)\cdot dt=\frac{a_0}{2}\cdot\int_0^x dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cdot\cos nt+b_n\cdot\sin nt)\,dt$$
$$=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n}{n}(1-\cos nx)\right)$$ となる．

定理4.4．f が連続で区分的に滑らか．かつ f' も連続なら．

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-n\cdot a_n\cdot\sin nx+n\cdot b_n\cdot\cos nx)$$ が成り立つ．

例．$f(x)=|x|$ の微分を考える．

$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots)$ より．フーリエ級数の微分は．

$f'(x)\sim\frac{4}{\pi}\cdot(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$ となり．

$f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ -1 & 0<x<\pi\end{cases}$ のフーリエ級数と一致する．

問題．$f(x)=x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx$ を使って．

$g(x)=x$ のフーリエ級数を求めよ

答 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)\sim 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ となる．