不連続な関数のフーリエ級数を考えると．不連続な点の近くでは．

大きな誤差があらわれてくる．これをギブス現象という．

どんな関数がフーリエ級数で表せるか．

点 c における関数 $f(x)$ の左側極限値と右側極限値を．

左極限 ：$f(c-0) = \lim_{h \to -0} f(c+h)$

右極限 ：$f(c+0) = \lim_{h \to +0} f(c+h)$ とする．

関数 $f(x)$ が c で連続とは．$f(c)$ が定義できていて．かつ

$f(c-0) = f(c+0)$ であるときをいう．

例．(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-\pi - x) & (-\pi < x \leqq 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$ は

$f(0+0) = \frac{1}{2}\pi$ ，$f(0-0) = -\frac{1}{2}\pi$ なので．$x=0$ で不連続．

(2). $f(x)$ が連続なら $f(c+0) = f(c-0)$ である．

定義 ・区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ が．有限個の点を除いては連続で、

不連続な点では左右の極限値が存在するとき，

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で区分的に連続であるという．

・無限区間で定義された関数 $f(x)$ は，任意の有限区間で区分的に連続のとき、

区分的に連続という．

・ある区間で $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区分的に連続のとき、

$f(x)$ を区分的に滑らかという．

$\longrightarrow$ 周期 2π の関数は．$[-\pi, \pi]$ から判定できる．

定理1.2. 周期2πの関数$f(x)$が区分的に滑らかならば、$f(x)$のフーリエ級数は.

(1) $f(x)$が連続な点では$f(x)$に収束する.

(2) $f(x)$が不連続な点では.

$\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ に収束する.

例. $f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi<x<0) \\ x & (0\leqq x\leqq\pi) \end{cases}$ を考えると.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nx\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cdot x\cdot\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi\cdot n}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot dx=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\cos\pi n-\frac{1}{\pi n^2}=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases} 0 & (n\text{が偶数}) \\ \frac{-2}{\pi n^2} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cdot\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(\pi\cdot\cos\pi n)+\frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{n}(-1)^n$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ である. これより.

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right)$$ とできる.

$f(x)$の不連続点は$x=\pi$であるが、フーリエ級数の$x=\pi$での値は.

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)(-1)^n=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi}{2}$$ となる.

$f(\pi+0)=0$, $f(\pi-0)=\pi$ より. 定理が成り立っている.

問題 周期 2π の関数のフーリエ級数を求め、不連続点で定理が成り立っていることを示せ。

(1) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$

(2) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

答 (1) $f(x)$ は奇関数より

上の例の計算から。

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n-1}$

$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\cdot\sin nx$ である。

ここで不連続な点は $x=\pi$ だが、そこでのフーリエ級数の値は 0。

$f(\pi+0) = -\pi$, $f(\pi-0) = \pi$ より定理をみたす。

(2) $f(x)$ は奇関数より。

$a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & n\text{が偶数} \\ \frac{4}{\pi n} & n\text{が奇数} \end{cases}$

$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin(2n-1)x$ である。

不連続点は、0 と π であるが、

フーリエ級数の値は $x=0$ で 0，$x=\pi$ で 0 をとる。

一方 $f(0+0) = 1$, $f(0-0) = -1$.

$f(\pi+0) = -1$, $f(\pi-0) = 1$ より定理をみたす。