曲線Cの法線ベクトル(接線ベクトルと直交するベクトル)を考える.

まず、一般のベクトル関数 $a(t)$ について. $|a(t)|$ が一定なら, $a(t) \perp \dot{a}(t)$ がわかる

$\because$ $a(t) \cdot \dot{a}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}|a(t)|^2 = 0$ よりわかる.

これより、単位接線ベクトル $\mathbf{t}(s)$ は常に $|\mathbf{t}(s)| = 1$ であるので. $\mathbf{t} \perp \mathbf{t}'$ がわかる.

$\mathbf{t}' = 0$ のとき, $\mathbf{t}'(s) = r''(s) = 0$ より. $r(s) = As + B$ となるので、曲線Cは直線である.

$\mathbf{t} \neq 0$ のとき, $\mathbf{t}'$ は $\mathbf{t}$ と直交している. これを単位ベクトル関数にするため,

$\kappa(s) = |\mathbf{t}'| = |r''| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$ とおいて.

$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \mathbf{t}' = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot r''(s)$ とする

この $n(s)$ を単位主法線ベクトルという.

ところで、$r''(s)$ を加速度とみると. 曲線Cは点Sで $\mathbf{t}$ 方向に向かっていて.

$n(s)$ 方向に力を受けていると考えられる.

このため. $\mathbf{t}$ と n で張られる平面を接触平面という

さらに. $b(s) = \mathbf{t}(s) \times n(s)$ を単位従法線ベクトルといい.

$n(s)$ と $b(s)$ で張られる平面を法平面という

例. $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ について. $\mathbf{t}(s), n(s), b(s)$ を求めよ. $(a, b > 0)$

答. まず. $\dot{r}(t) = (-a\sin t, a \cdot \cos t, b)$ より.

$$S(t) = \int_0^t |\dot{r}(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, dt = t \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$ である

以下 $\sqrt{a^2+b^2} = c$ とおくと. $t = \frac{s}{c}$ より.

$$r(s) = \left(a \cdot \cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$$ である

これより $\mathbb{t}(s)=r'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$

$=\frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c},\ a\cos\frac{s}{c},\ b\right)$ である

次に $r''(s)=\frac{1}{c}\left(-\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$ より

$\kappa(s)=|r''(s)|=\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\cdot\left(\cos^2\frac{s}{c}+\sin^2\frac{s}{c}\right)}=\frac{a}{c^2}$ である

$\therefore\ \mathbb{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\cdot r''(s)=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$ となる.

また $\mathbb{b}(s)=\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}(s)=\frac{1}{c}\left(b\sin\frac{s}{c},\ -b\cos\frac{s}{c},\ a\right)$ である

問題. $r(t)=(1-\sin t,\ 1-\cos t,\ t)$ について. $\mathbb{t}(s),\ \mathbb{n}(s),\ \mathbb{b}(s)$ を求めよ.

答. まず、$\dot{r}(t)=(-\cos t,\ \sin t,\ 1)$ より

$s(t)=\int_0^t|\dot{r}(t)|\,dt=\int_0^t\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}t$ である. $t=\frac{1}{\sqrt{2}}s$ より

$r(s)=\left(1-\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ 1-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ である

これより $\mathbb{t}(s)=r'(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ 1\right)$ となる

次に $r''(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ 0\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ より

$\kappa(s)=|r''(s)|=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\frac{s}{\sqrt{2}}+\cos^2\frac{s}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}$ となり

$\mathbb{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}r''(s)=\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ となる

また $\mathbb{b}(s)=\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ -1\right)$ である

定理3.1 フルネー・セレーの公式 曲線$r(t)$に対し

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s)\cdot n(s) \\ n'(s) = -\kappa(s)\cdot t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) = -\tau(s)\cdot n(s) \end{cases}$$ が成り立つ.

ただし $\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2}\cdot |r'(s)\ r''(s)\ r'''(s)|$ である.

補題 3つのベクトル関数 $a(t), b(t), c(t)$ が単位ベクトル関数であり

かつ互いに直交するとすれば、関数 $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ が存在して.

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \omega_3 b(t) - \omega_2 c(t) \\ \dot{b}(t) = -\omega_3 a(t) + \omega_1 c(t) \\ \dot{c}(t) = \omega_2 a(t) - \omega_1 b(t) \end{cases}$$ とできる

$\because$ $\{a(t), b(t), c(t)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底なので.

$\dot{a}(t) = x_1 a(t) + y_1 b(t) + z_1 c(t)$ とできる. これと $a(t)$ との内積をとると.

$0 = x_1\cdot 1 + y_1\cdot 0 + z_1\cdot 0$ より $x_1 = 0$ となる.

これより $\dot{a}(t) = y_1 b(t) + z_1 c(t)$ となる 同様にして.

$\dot{b}(t) = x_2 a(t) + z_2 c(t)$

$\dot{c}(t) = x_3 a(t) + y_3 b(t)$ とできる.

ここで、 $a(t)\cdot b(t) = 0$ を微分して.

$0 = (a(t)\cdot b(t))' = \dot{a}(t)\cdot b(t) + a(t)\cdot \dot{b}(t) = y_1 + x_2$ となるので.

$y_1 = -x_2$ となり, $y_1 = -x_2 = \omega_3$ とおく.

同様に $b(t)\cdot c(t)=0$ を微分すれば、 $z_2=-y_3=\omega_1$

$a(t)\cdot c(t)=0$ を微分すれば、 $x_3=-z_1=\omega_2$ とでき、

$$\begin{cases} \dot{a}(t)= \qquad \omega_3 b(t)-\omega_2 c(t) \\ \dot{b}(t)=-\omega_3 a(t) \qquad +\omega_1 c(t) \\ \dot{c}(t)=\omega_2 a(t)-\omega_1 b(t) \end{cases}$$ を得る。

定理 3.1 の証明

まず、 $\mathbb{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}'$ であったので、補題において、

$a=\mathbb{t}(s)$, $b=\mathbb{n}(s)$, $c=\mathbb{b}(s)$ と考えれば、 $\omega_3=\kappa(s)$ $\omega_2=0$ となる。

さらに $\omega_1=\tau(s)$ とおくと、

$$\tau(s)=-\mathbb{b}'(s)\cdot\mathbb{n}(s)=-(\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}(s))'\cdot\mathbb{n}(s),$$

$$=-(\underbrace{\mathbb{t}'(s)\times\mathbb{n}(s)}_{\kappa(s)\mathbb{n}(s)\times\mathbb{n}(s)=0}+\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}'(s))\cdot\mathbb{n}(s)=-(\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}'(s))\cdot\mathbb{n}(s)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}'(s)\right)'=\frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}''(s)-\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}\mathbb{t}'(s)$$

$$=-|\mathbb{t}(s)\ \ \mathbb{n}'(s)\ \ \mathbb{n}(s)|=|\mathbb{t}(s)\ \ \mathbb{n}(s)\ \ \boxed{\mathbb{n}'(s)}|$$

$$=\left|\mathbb{t}(s)\ \ \frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}'(s)\ \ \frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}''(s)-\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}\mathbb{t}'(s)\right|$$

$$=\left|\mathbb{t}(s)\ \ \frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}'(s)\ \ \frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}''(s)\right|$$

$$=\frac{1}{\kappa(s)^2}|\mathbb{t}(s)\ \ \mathbb{t}'(s)\ \ \mathbb{t}''(s)|=\frac{1}{\kappa(s)^2}|r'(s)\ \ r''(s)\ \ r'''(s)|$$ となる。

ここで、$\kappa(s)$ と $\tau(s)$ をそれぞれ曲線 C の点 $P(s)$ における

曲率 および 捩率 という。

また $\rho(s)=\frac{1}{\kappa(s)}$ を 曲率半径 という。

例. $r(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ について. $\kappa(s)$ と $\tau(s)$ を求めよ $(a, b>0)$

答. さきほどの計算から

$$r(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$$ であったので.

$$r'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)=\frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right)$$

$$r''(s)=\frac{1}{c}\left(-\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, 0\right)=\frac{-a}{c^2}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$r'''(s)=\frac{-a}{c^2}\cdot\left(-\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right)=-\frac{a}{c^3}\left(-\sin\frac{s}{c}, \cos\frac{s}{c}, 0\right)$$

である. これより.

$$\kappa(s)=|r''(s)|=\frac{a}{c^2}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{s}{c}+\sin^2\frac{s}{c}}=\frac{a}{c^2}$$

$$\tau(s)=\frac{c^4}{a^2}\cdot|r'(s)\ \ r''(s)\ \ r'''(s)|$$

$$=\frac{c^4}{a^2}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{-a}{c^2}\cdot\frac{-a}{c^3}\cdot\begin{vmatrix}-a\sin\frac{s}{c} & a\cos\frac{s}{c} & b\\ \cos\frac{s}{c} & \sin\frac{s}{c} & 0\\ -\sin\frac{s}{c} & \cos\frac{s}{c} & 0\end{vmatrix}=\frac{b}{c^2}$$ である.

問題. $r(t)=(1-\sin t,\ 1-\cos t,\ t)$ について $\kappa(s), \tau(s)$ を求めよ.

答. さきほどの計算から. $\kappa(s)=\frac{1}{2}$ であり. また.

$$r(s)=\left(1-\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ 1-\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$r'(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

$$r''(s)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$ であったので

$$r'''(s)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$ である. これより

$$\tau(s)=\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\begin{vmatrix}-\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 1\\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 0\\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$ である.