ベクトル関数 $A(t)$ の導関数がベクトル関数 $a(t)$ であるとき.

$A(t)$ を $a(t)$ の不定積分または原始ベクトル関数といい.

$A(t)=\int a(t)\,dt$ とかく. 成分で書くと.

$\int a(t)\,dt=\left(\int a_1(t)\,dt,\ \int a_2(t)\,dt,\ \int a_3(t)\,dt\right)$ である.

また. t の区間 $[\alpha,\beta]$ における定積分は

$\int_\alpha^\beta a(t)\,dt=\left(\int_\alpha^\beta a_1(t)\cdot dt,\ \int_\alpha^\beta a_2(t)\,dt,\ \int_\alpha^\beta a_3(t)\,dt\right)$ である.

例1. ベクトル関数 $v(t)$ についての微分方程式

$$\frac{d}{dt}v(t)+P(t)v(t)=Q(t)$$

を解け. ただし $P(t)$ は関数、$Q(t)$ はベクトル関数とする.

答. 方程式の成分を考えると. 例えば第1成分は.

$\frac{d}{dt}v_1(t)+P(t)\cdot v_1(t)=Q_1(t)$ である.

これは1階線形微分方程式より

$v_1=e^{-\int P(t)\cdot dt}\cdot\left(\int e^{\int P(t)\cdot dt}\cdot Q_1(t)\,dt+k_1\right)$ である

ただし. k_1 は定数. $k=(k_1,k_2,k_3)$ とすると定ベクトルになる.

$\therefore v=e^{-\int P(t)\cdot dt}\cdot\left(\int e^{\int P(t)dt}\cdot Q(t)\cdot dt+k\right)$ となる.

問題. 次の微分方程式を解け. ただし. C は定ベクトルである.

(1) $v'(t)=C$

(2) $v'(t)+v(t)\cdot \tan t=(\cos t,0,0)$

答(1). 第1成分は.

$v_1'(t) = C_1$ より $v_1(t) = C_1 t + k_1$

$\therefore v(t) = t \cdot C + k$

(2) 第1成分は.

$v_1'(t) + v_1(t) \cdot \tan t = \cos t$ より

$$v_1(t) = e^{-\int \tan t\, dt} \cdot \left(\int e^{\int \tan t\, dt} \cdot \cos t\, dt + k_1 \right)$$

$$= \cos t \cdot \left(\int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t \cdot dt + k_1 \right)$$

$$= \cos t\,(t + k_1) = t \cdot \cos t + k_1 \cdot \cos t$$ である.

第2,3成分は

$v_2'(t) + v_2(t) \cdot \tan t = 0$ より

$v_2(t) = k_2 \cdot e^{-\int \tan t\, dt} = k_2 \cdot \cos t$ である. これらより

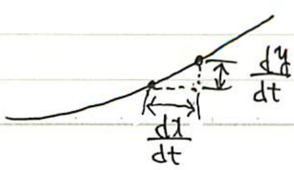
$v(t) = (t \cdot \cos t, 0, 0) + k \cdot \cos t$ である.

曲線と運動

曲線Cがベクトル方程式 $r(t) = \overrightarrow{OP}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で与えられていたとする. ここで各成分が微分可能かつ導関数が連続のとき, 曲線Cは滑らかであるという. 以下出てくる曲線は滑らかであるとする

曲線Cのある点 $A = P(\alpha)$ から点 $P(t)$ までの曲線弧の長さSは.

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$ である.



← この図と三平方の定理から

ここで、積分の中身は $|r'(t)|$ であるので、

$s(t)=\int_\alpha^t |r'(t)|\,dt$ と表せる。

さらに $S(t)$ も微分可能で、

$\frac{dS}{dt}=|r'(t)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ とできる。

$\because S'(t)\geqq 0$ より、$S(t)$は増加関数なので、逆関数 $t=t(S)$が存在する。

すると、$r(t)$に $t=t(s)$を代入することで、$r(s)=r(t(s))$ を sについてのベクトル関数とみれる。

つまり $r(s)=(x(s),y(s),z(s))=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s)))$ である。

この媒介変数 s は弧長媒介変数 という。また、

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ を 線素 という

以後 r の s による微分を $r'(s)=\frac{d}{ds}r(s)$

r の t による微分を $\dot{r}(t)=\frac{d}{dt}r(t)$ と書く。

$r'(s)=\dot{r}(t)\cdot\frac{dt}{ds}$ より $|r'(t)|=|\dot{r}(t)|\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d|r(t)|}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=1$ となり、

$\mathbb{t}=r'(s)=(x'(s),y'(s),z'(s))$ は長さ1の接線ベクトルになる。

これを Cの単位接線ベクトル という

例. $r(t)=(a\cdot\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ の $t=0$からt=tまでの弧長Sと単位接線ベクトルを求めよ

答. $\dot{r}(t)=(-a\sin t,\ a\cdot\cos t,\ b)$ より

$|\dot{r}(t)|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ となり、

$S(t)=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=t\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ である。

また $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$ となる

問題. 次の曲線の $t=0$ から $t=t$ までの弧長 s と. 単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (2t^3, 3t, 3t^2)$　　(2) $\boldsymbol{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\cdot t)$

答 (1) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (6t^2, 3, 6t)$ より

$|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = 3\cdot\sqrt{4t^4+1+4t^2} = 3(2t^2+1)$

$\therefore s(t) = \int_0^t 3(2t^2+1)\,dt = [2t^3+3t]_0^t = 2t^3+3t$.

また $\boldsymbol{t} = \dfrac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{3(2t^2+1)}(6t^2, 3, 6t) = \dfrac{1}{2t^2+1}(2t^2, 1, 2t)$ となる

(2) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ より

$|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = e^t+e^{-t}$

$\therefore s(t) = \int_0^t e^t+e^{-t}\,dt = e^t - e^{-t}$

また $\boldsymbol{t} = \dfrac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}\cdot(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ となる