6月9日　練習問題

1. 次の微分方程式を解きなさい．(各10点)

(1) $y' = xy - x$　　(2) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, $y(1) = 1$

(3) $(3x + 2y + 1)dx + (2x - y - 4)dy = 0$　　(4) $xy' + y = \sin x$

(5) $y' \sin x = y \cos x$　　(6) $y' + y = x$, $y(0) = 0$

2. ベルヌーイの微分方程式　$y' + xy = \dfrac{x}{y}$ を以下の順序で解きなさい．(各5点)

(1) $z = y^{1-a}$ (a の値は自分で求めよ) を用いて変数変換を行い，1階線形微分方程式を求めよ．

(2) (1) で得られた微分方程式を解け．

(3) (2) で得られた解をもとに，ベルヌーイの微分方程式の一般解を求めよ．

3. 全微分方程式 $\sin y dx + \cos y dy = 0$ について，e^x が積分因子であることを示し，一般解を求めよ．(15点)

4. $y' = (x - y)^2$ の一般解を，$u = x - y$ で変数変換をすることにより求めよ．(10点)

時間が余ってしまった人は以下の問題をノートにやってください．

次の微分方程式を解け．(7と8は講義でやっていない内容です)

(1) $y^3 + x^6 y' = 0$　　(2) $(y^2 + e^x \sin y)dx + (2xy + e^x \cos y)$

(3) $xy' + 2y = 3x$　　(4) $y' \cos x + 3y \sin x = \sin 2x$

(5) $(\cos x + 2xy)dx + x^2 dy = 0$　　(6) $xy' + y = y^2 \log x$

(7) $xy' + y^2 + 1 = 0$　　(8) $y' = \dfrac{y - x + 1}{y - x + 5}$

練習問題　解答.

1. (1) $y' = x(y-1)$ 　より 公式1を使うと.

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int x\, dx$$

$$\log(y-1) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y-1 = e^{\frac{1}{2}x^2+C} = e^C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \qquad (e^C \to C)$$

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$ 　である.

(2) $y' = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ 　より. 公式2を使うと. $v = \frac{y}{x}$ とおいて.

$$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2-1}{2v} - v\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{-v^2-1}{2v} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{v^2+1}{2v}$$ 　となる

∴公式1より

$$\int \frac{2v}{v^2+1} dv = \int -\frac{1}{x} dx.$$

$$\log(v^2+1) = -\log x + C$$

$$v^2 + 1 = e^C \cdot \frac{1}{x} = C \cdot \frac{1}{x} \qquad (e^C \to C)$$

$x^2 + y^2 = C \cdot x$ 　となる. ここで. $y(1) = 1$ より $C = 2$.

∴ $x^2 + y^2 = 2 \cdot x$ 　となる

(3). $\frac{\partial}{\partial y}(3x + 2y + 1) = 2$, $\frac{\partial}{\partial x}(2x - y - 4) = 2$ 　より これは完全. ∴公式3より.

$$u(x, y) = \int 3x + 2y + 1\, dx + \int 2x - y - 4\, dy - \iint 2\, dx\, dy$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2xy + x - \frac{1}{2}y^2 - 4y = C$$ 　となり

$3x^2 + 4xy + 2x - y^2 - 8y = C \qquad (2C \to C)$ 　が解である.

(4). $y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \sin x$ より 公式4を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \sin x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\int \sin x \, dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} (-\cos x + C)$$ となる.

(5) $y' = y \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$ より 公式1を使うと.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\log y = \log \sin x + c$$

$$y = e^{c} \cdot \sin x = c \cdot \sin x$$ $(e^{c} \to c)$ となる

(6) 公式4より

$$y = e^{-\int 1 dx} \cdot \left(\int x \cdot e^{\int 1 dx} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left(\int x \cdot e^{x} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left(x \cdot e^{x} - \int e^{x} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} (x \cdot e^{x} - e^{x} + c)$$

$$= x - 1 + c \cdot e^{-x}$$ となる $y(0) = 0$ より $c = 1$.

$\therefore$ $y = x - 1 + e^{-x}$ である.

2.(1) $a = -1$ であるので, $z = y^{2}$ とすると.

$y = z^{\frac{1}{2}}$, $y' = \frac{1}{2} \cdot z' \cdot z^{-\frac{1}{2}}$ より

$$\frac{1}{2} z' \cdot z^{-\frac{1}{2}} + x \cdot z^{\frac{1}{2}} = x \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$$z' + 2xz = 2x$$ となる

(2) 公式4より

$$z = e^{-\int 2x dx} \cdot \left(\int 2x \cdot e^{\int 2x dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= e^{-x^2} \cdot (e^{x^2} + c) = 1 + c \cdot e^{-x^2}$$ となる.

(3) $z = y^2$ より

$$y^2 = 1 + c \cdot e^{-x^2}$$ である.

3. $\frac{\partial}{\partial y} e^x \sin y = e^x \cdot \cos y$, $\frac{\partial}{\partial x} e^x \cdot \cos y = e^x \cdot \cos y$ より

e^xをかけると完全になり. e^xは積分因子である. ∴公式3より

$$u(x, y) = \int e^x \sin y \, dx + \int e^x \cdot \cos y \cdot dy - \iint e^x \cos y \, dx \, dy$$

$$= e^x \sin y + e^x \sin y - e^x \sin y = e^x \cdot \sin y = C$$ となる

4. $u = x - y$ とすると. $y = x - u$, $y' = 1 - u'$ より

$1 - u' = u^2$ となる. 公式1を使うと.

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \int 1 dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du = x + c$$

$$-\log(1-u) + \log(1+u) = 2x + 2c = 2x + c \quad (2c \to c)$$

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2x+c} = c \cdot e^{2x} \quad (e^c \to c)$$

$$\frac{1+x-y}{1-x+y} = c \cdot e^{2x}$$

$$\frac{2}{1-x+y} - 1 = c \cdot e^{2x}$$

$$y = \frac{2}{c \cdot e^{2x} + 1} + x - 1$$ となる.

(1). 公式1より

$$\int \frac{1}{y^3}\,dy = -\int \frac{1}{x^6}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{5}x^{-5} + C$$

$2y^2 + 5x^5 = -10\cdot C\cdot x^5 y^2 = C\cdot x^5\cdot y^2 \quad (-10C \to C)$ である

(2) $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^x\cdot \sin y) = 2y + e^x\cos y$, $\frac{\partial}{\partial x}(2xy + e^x\cos y) = 2y + e^x\cos y$

より これは完全. ∴公式3より

$$u(x,y) = \int y^2 + e^x\sin y\,dx + \int 2xy + e^x\cos y\,dy - \int 2y + e^x\cos y\,dx\,dy$$

$= xy^2 + e^x\cdot\sin y = C$ となる

(3) 公式4 より.

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\cdot\left(\int 3\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}\,dx + C\right)$$

$$= x^{-2}\cdot\left(\int 3\cdot x^2\,dx + C\right)$$

$= x^{-2}\cdot(x^3 + C) = x + C\cdot x^{-2}$ となる.

(4) 公式4より

$$y = e^{-\int 3\frac{\sin x}{\cos x}dx}\cdot\left(\int 2\sin x\cdot e^{\int 3\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx}\,dx + C\right)$$

$$= \cos^3 x\cdot\left(\int 2\sin x\cdot\cos^{-3}x\,dx + C\right)$$

$\cos x = t$ とおいて. $-\sin x\cdot dx = dt$ より

$$= \cos^3 x\cdot\left(\int -2t^{-3}\,dt + C\right)$$

$$= \cos^3 x\,(t^{-2} + C)$$

$= \cos^3 x\,(\cos^{-2}x + C) = \cos x + C\cdot\cos^3 x$ である.

(5) $\frac{\partial}{\partial y}(\cos x + 2xy) = 2x$, $\frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x$ よりこれは完全, ∴公式3より

$u(x,y) = \int \cos x + 2xy \, dx + \int x^2 \, dy - \iint 2x \, dx \, dy$

$= \sin x + x^2 y = C$ となる

(6) $z = y^{-1}$ とすると. $y = z^{-1}$, $y' = -z' \cdot z^{-2}$ より

$-x \cdot z' \cdot z^{-2} + z^{-1} = z^{-2} \cdot \log x$

$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x} \log x$ となる. 公式4より

$z = e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \cdot \left(\int -\frac{1}{x} \cdot \log x \cdot e^{\int -\frac{1}{x} dx} \cdot dx + c \right)$

$= x \cdot \left(\int -\frac{1}{x^2} \log x \, dx + c \right)$

$= x \cdot \left(\frac{1}{x} \log x - \int \frac{1}{x^2} dx + c \right)$

$= x \left(\frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x} + c \right)$

$= \log x + 1 + c \cdot x$ となり.

$y = \dfrac{1}{\log x + 1 + cx}$ である

(7)と(8)は答えだけのせます

(7) $y = \tan(\log x^{-1})$

(8) $y^2 - 2xy + x^2 - 2x + 10y = c$