演習問題

1 次を解け

(1) $y' + y = 2$

(2) $xy' + 4y = x^{-4}$

(3) $xy' + (1+x)y = e^x$

(4) $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = 2(1-x^2)$, $y(0) = 2$

(5) $y' \cdot \cos x + 3y \cdot \sin x = \sin 2x$

2 (1) $y' + xy = \frac{x}{y}$

(2) $y' + \frac{y}{x} = x^2 \cdot y^3$

(3) $xy' + y = y^2 \cdot \log x$

解答

1 (1) 公式4より

$$y = e^{-\int 1dx}\cdot\left(\int 2\cdot e^{\int 1dx}\cdot dx + c\right)$$
$$= e^{-x}(2\cdot e^{x} + c)$$
$$= 2 + c\cdot e^{-x}$$ である

(2) $y' + \frac{4}{x}y = x^{-5}$ より．公式4を使うと．

$$y = e^{-\int\frac{4}{x}dx}\cdot\left(\int x^{-5}\cdot e^{\int\frac{4}{x}dx}\cdot dx + c\right)$$
$$= e^{-4\cdot\log x}\left(\int x^{-5}\cdot e^{4\cdot\log x}dx + c\right)$$
$$= x^{-4}\left(\int x^{-1}\cdot dx + c\right)$$
$$= x^{-4}(\log x + c)$$ である．

(3) $y' + \frac{1+x}{x}y = \frac{1}{x}\cdot e^{x}$ より 公式4を使うと．

$$y = e^{-\int\frac{1+x}{x}dx}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\cdot e^{x}\cdot e^{\int\frac{1+x}{x}dx}dx + c\right)$$
$$= e^{-\log x - x}\cdot\left(\int\frac{1}{x}\cdot e^{x}\cdot e^{\log x + x}\cdot dx + c\right)$$
$$= \frac{1}{x}\cdot e^{-x}\cdot\left(\int e^{2x}dx + c\right)$$
$$= \frac{1}{x}e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c\right)$$
$$= \frac{1}{2x}e^{x} + \frac{c}{x}\cdot e^{-x}$$ である

(4) 公式4より

$$y = e^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx} \cdot \left(\int 2(1-x^2) \cdot e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} dx + C \right)$$

$$= e^{\log(1-x^2)} \cdot \left(\int 2(1-x^2) \cdot e^{-\log(1-x^2)} dx + C \right)$$

$$= (1-x^2) \cdot \left(\int 2 dx + C \right)$$

$= (1-x^2)(2x+C)$ となる

ここで $y(0)=2$ より. $C=2$ をえる.

$\therefore \quad y = 2(1-x^2)(x+1)$ となる

(5) $y' + \frac{3 \cdot \sin x}{\cos x} \cdot y = 2 \cdot \sin x$ より 公式4を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{3 \cdot \sin x}{\cos x}dx} \cdot \left(\int 2 \cdot \sin x \cdot e^{\int \frac{3\sin x}{\cos x}dx} dx + C \right)$$

$$= e^{3\log \cos x} \left(\int 2 \cdot \sin x \cdot e^{-3\log \cos x} dx + C \right)$$

$= \cos^3 x \cdot \left(\int 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + C \right)$ （$\cos x = t$ とおいて置換積分）

$$= \cos^3 x \cdot \left(\int 2 \frac{-1}{t^3} dt + C \right)$$

$$= \cos^3 x \cdot \left(\frac{1}{t^2} + C \right)$$

$= \cos x + C \cdot \cos^3 x$ である

2 (1) $z = y^2$ とおくと. $y = z^{\frac{1}{2}}$

$y' = z' \cdot \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$ より. 与式は

$z' \cdot \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} + x \cdot z^{\frac{1}{2}} = x z^{-\frac{1}{2}}$

$z' + 2xz = 2x$ とできる. ここで公式4より.

$z = e^{-\int 2x dx} \cdot \left(\int 2x \cdot e^{\int 2x dx} dx + c \right)$

$= e^{-x^2} (e^{x^2} + c)$

$= 1 + c \cdot e^{-x^2}$ となり

$y^2 = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ である

(2) $z = y^{-2}$ とおくと $y = z^{-\frac{1}{2}}$

$y' = z' (-\frac{1}{2}) z^{-\frac{3}{2}}$ より 与式は

$-\frac{1}{2} z' \cdot z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = x^2 \cdot z^{-\frac{3}{2}}$

$z' - 2 \frac{1}{x} \cdot z = -2x^2$ とできる. ここで公式4より

$z = e^{\int 2\frac{1}{x} dx} \cdot \left(\int -2x^2 \cdot e^{\int -\frac{2}{x} dx} \cdot dx + c \right)$

$= x^2 \cdot \left(\int -2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} dx + c \right)$

$= x^2 (-2x + c)$

$y^{-2} = x^2 (-2x + c)$

$\therefore$ $x^2 y^2 (-2x + c) = 1$ である

(3) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\log x}{x} \cdot y^2$ より. $z = y^{-1}$ とすれば. $y = z^{-1}$.

$y' = -z' \cdot z^{-2}$ となり. 与式は.

$$-z' \cdot z^{-2} + \frac{1}{x} z^{-1} = \frac{\log x}{x} \cdot z^{-2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\log x}{x}$$ となる. ここで公式4より

$$z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left(-\int \frac{\log x}{x} \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= x \left(\int -\frac{\log x}{x^2} \, dx + c \right)$$

$$= x \left(\frac{\log x}{x} - \int \frac{1}{x^2} \, dx + c \right)$$

$$= x \left(\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + c \right)$$

$$= \log x + 1 + cx$$ となり.

$$y = \frac{1}{\log x + 1 + cx}$$ である