演習問題 2.

1 はじめに示した関数が，次に示した微分方程式の解になっていることを示せ．

(1) $y = c \cdot e^{-2x}$,　$y' + 2y = 0$

(2) $xy = C$,　$xy' = -y$

(3) $\cos y - \frac{x^2}{2} + 2 = 0$,　$y' = -\frac{x}{\sin y}$

(4) $\begin{cases} x = \alpha - \sin\alpha \\ y = 1 - \cos\alpha \end{cases}$　$y'' + \frac{1}{y^2} = 0$

ヒント：$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}}$ を使って y'' を求める．

2 はじめに示した関数が，次に示した微分方程式の解になっていることを示せ．

さらに，かっこ内の初期条件をみたす特殊解を求めよ．

(1) $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 e^{-2x}$,　$y'' - 4y = 0$,　$(y(0) = 1,\ y'(0) = 0)$

(2) $y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$,　$y'' + y = 0$　$(y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 1)$

(3) $y = \frac{C - x}{1 + Cx}$,　$(1 + x^2)y' = -1 - y^2$　$(y(1) = 0)$

3 次の式から（微分をするなどして）任意定数を消し，微分方程式を作れ．

(1) $y = \cos x + C$

(2) $y = C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x$

(3) $y = x \cdot \tan(x + C)$

解答

1 (1) 微分方程式に解を代入すると

$$\text{左辺} = y' + 2y = (c \cdot e^{-2x})' + 2 \cdot c e^{-2x} = -2 \cdot c e^{-2x} + 2c \cdot e^{-2x} = 0 = \text{右辺}$$

となり、解であることがわかる.

(2) $xy = c$ を微分すると. $y + xy' = 0$ となる. これより.

$\text{左辺} = xy' = -y = \text{右辺}$ となり. 解であることがわかる.

(3) $\cos y - \frac{x^2}{2} + 2 = 0$ を微分すると. $-y' \sin y - x = 0$ より

$y' = -\frac{x}{\sin y}$ となる. これより

$\text{左辺} = y' = -\frac{x}{\sin y} = \text{右辺}$ となり. 解であることがわかる.

(4). $$y' = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{1-\cos\alpha}$$

$$y'' = \frac{dy'}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos\alpha} = \frac{-1}{(1-\cos\alpha)^2}$$ より.

$$\text{左辺} = y'' + \frac{1}{y^2} = \frac{-1}{(1-\cos\alpha)^2} + \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2} = 0 = \text{右辺}$$

となり. 解であることがわかる.

2 (1) $y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$ より. $y' = 2 \cdot c_1 \cdot e^{2x} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-2x}$

$y'' = 4c_1 \cdot e^{2x} + 4c_2 \cdot e^{-2x}$ となる. これより

$$\text{左辺} = y'' - 4y = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 \cdot e^{-2x} - 4(c_1 e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}) = 0 = \text{右辺}$$

となり, 解であることがわかる.

また. $1 = c_1 + c_2$, $0 = c_1 - c_2$ より. $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ をえる

∴ 求める特殊解は $y = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ である.

(2) $y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$ より $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cdot \cos x$

$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ となる. よって.

左辺 $= y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \cdot \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0 =$ 右辺 となり.

解であることがわかる. また初期条件から

$1 = 0 + C_2$, $1 = -C_1 + 0$ より. $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ となり

求める特殊解は $y = -\cos x + \sin x$ となる.

(3) $y = \dfrac{c - x}{1 + cx}$ より $y' = \dfrac{-1 - cx - c^2 + cx}{(1+cx)^2} = \dfrac{-(1+c^2)}{(1+cx)^2}$ となる. よって

左辺 $= (1+x^2)y' = \dfrac{-(1+c^2)(1+x^2)}{(1+cx)^2} = -\dfrac{1+c^2+x^2+c^2x^2}{(1+cx)^2} = -\dfrac{c^2+x^2-2cx}{(1+cx)^2} - 1$

$= -\dfrac{(c-x)^2}{(1+cx)^2} - 1 = -1 - y^2 =$ 右辺 となり 解であることがわかる.

また. 初期条件から.

$0 = \dfrac{c-1}{1+c}$ となり $c = 1$ がわかる.

∴ 求める解は $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ である

3 (1). $y' = -\sin x$

(2) $y' = 2 \cdot C_1 \cdot \cos 2x - 2 C_2 \cdot \sin 2x$, $y'' = -4C_1 \cdot \sin 2x - 4C_2 \cdot \cos 2x$ より

$y'' + 4y = 0$ である.

(3) $y' = \tan(x+c) + x \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x+c)}$ ここから c を消すと.

$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x} + x$ となり.

$xy' = y^2 + y + x^2$ が求める微分方程式になる