演習問題

1 次を解け.

(1) $\begin{cases} x'(t) - 3y(t) = 0 & x(0) = 2 \\ y'(t) - 3x(t) = 0 & y(0) = 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'(t) + y(t) = t & x(0) = 0 \\ y'(t) - x(t) = t & y(0) = 0 \end{cases}$

2 次を解け

(1) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(2) $x''(t) + x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

(3) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \cos t$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

解答

1 (1). ラプラス変換すると．

$$\begin{cases} sX(s)-2-3Y(s)=0 \\ sY(s)-4-3X(s)=0 \end{cases}$$ より

$$s^2X(s)-3sY(s)=2s$$

$$+\underline{)\ -9X(s)+3sY(s)=12}$$

$$(s^2-9)X(s) \qquad =2s+12$$

$$X(s)=\frac{2s+12}{s^2-9}=\frac{2s+12}{(s-3)(s+3)}=\frac{3}{s-3}-\frac{1}{s+3}$$

同様に

$$Y(s)=\frac{1}{s}\left(3X(s)+4\right)=\frac{1}{s}\left(\frac{6s+36+4(s^2-9)}{s^2-9}\right)$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s^2+6s}{s^2-9}=\frac{4s+6}{(s-3)(s+3)}=\frac{3}{s-3}+\frac{1}{s+3}$$

これより

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=3\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)=3\cdot e^{3t}-e^{-3t}$$

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=3\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)=3\cdot e^{3t}+e^{-3t}$$

(2) ラプラス変換すると．

$$\begin{cases} sX(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2} \\ sY(s)-X(s)=\frac{1}{s^2} \end{cases}$$ より

$$sX(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$+)\ \underline{-sX(s)+s^2Y(s)=\frac{1}{s}}$$

$$(s^2+1)Y(s)=\frac{s+1}{s^2}$$

$Y(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s^2+1)}=\dfrac{As+B}{s^2+1}+\dfrac{C}{s^2}+\dfrac{D}{s}$ とすると.

右辺 $=\dfrac{As^3+Bs^2+Cs^2+C+Ds^3+Ds}{s^2(s^2+1)}=\dfrac{(A+D)s^3+(B+C)s^2+Ds+C}{s^2(s^2+1)}$ となり

$A=-1, B=-1, C=1, D=1$ である. これより

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=-L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=-\cos t-\sin t+t+1.$$

$x(t)=-t+y'(t)=-t+\sin t-\cos t+1$ である.

$\boxed{2}$ (1) $x'(0)=C$ としてラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-C-4sX(s)+5X(s)=0$$

$$(s^2-4s+5)X(s)=C$$

$X(s)=\dfrac{C}{s^2-4s+5}=\dfrac{C}{(s-2)^2+1}$ となる. これより

$x(t)=L^{-1}\left(\dfrac{C}{(s-2)^2+1}\right)=C\cdot e^{2t}\cdot\sin t$ となる.

ここで $x(\frac{\pi}{2})=1$ より $1=C\cdot e^{\pi}$ となり $C=e^{-\pi}$

$\therefore x(t)=e^{2t-\pi}\cdot\sin t$ である

(2) $x'(0)=c$ としてラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-s-c+X(s)=0$$

$$(s^2+1)X(s)=s+c$$

$$X(s)=\frac{s+c}{s^2+1}$$ となる. これより

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{s+c}{s^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+c\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\cos t+c\cdot\sin t.$$

ここで. $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ より $c=2$.

$\therefore x(t)=\cos t+2\cdot\sin t$.

(3). $x'(0)=c$ としてラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-c-4sX(s)+5X(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2-4s+5)X(s)=\frac{s}{s^2+1}+c=\frac{cs^2+s+c}{s^2+1}$$

$$X(s)=\frac{s}{(s^2-4s+5)(s^2+1)}+\frac{c}{s^2-4s+5}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{-s+5}{s^2-4s+5}+\frac{1}{8}\frac{s-1}{s^2+1}+\frac{c}{s^2-4s+5}$$ これより

$$x(t)=\frac{1}{8}\left(-L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right)+3\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right)+c\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-e^{2t}\cdot\cos t+3e^{2t}\cdot\sin t+\cos t-\sin t\right)+c\cdot e^{2t}\cdot\sin t$$

ここで $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ より

$$1=\frac{1}{8}(3\cdot e^{\pi}-1)+c\cdot e^{\pi}$$ となり $c=\frac{9}{8}e^{-\pi}-\frac{3}{8}$ これより

$$x(t)=\frac{1}{8}\left(-e^{2t}\cdot\cos t+3e^{2t}\sin t+\cos t-\sin t+(9e^{-\pi}-3)e^{2t}\cdot\sin t\right)$$ である