演習問題

① 次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{s^3}$　(2) $\dfrac{s}{s^2+4}$　(3) $\dfrac{1}{(s-2)^3}$　(4) $\dfrac{e^{-2s}}{s^3}$

(5) $\dfrac{e^{-2s}\cdot s}{s^2+4}$　(6) $\dfrac{2}{s^2+6s+13}$　(7) $\dfrac{s}{s^2+6s+13}$

② 次の関数の合成積とそのラプラス変換を求めよ

(1) $f(t)=t$, $g(t)=e^t$.

(2) $f(t)=t^2$, $g(t)=\sin t$

(3) $f(t)=\sin t$, $g(t)=\cos t$.

解答

1 (1) ③より $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)=\frac{t^2}{2}$

(2) ⑩より $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)=\cos 2t$

(3) $F(s)=\frac{1}{s^3}$ とすれば、 $\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\frac{t^2}{2}\ (=f(t))$. これより

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^3}\right)=\mathcal{L}^{-1}(F(s-2))=e^{2t}\cdot f(t)=e^{2t}\cdot\frac{t^2}{2}$$

5

(4) $F(s)=\frac{1}{s^3}$ とすれば、

3

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^3}\right)=\mathcal{L}^{-1}(e^{-2s}\cdot F(s))=f(t-2)\cdot U(t-2)=\frac{t^2}{2}\cdot U(t-2)$$

(5) $F(s)=\frac{s}{s^2+4}$ とすれば、 $\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\cos 2t\ (=f(t))$ これより

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}\cdot s}{s^2+4}\right)=\mathcal{L}^{-1}(e^{-2s}\cdot F(s))=f(t-2)\cdot U(t-2)=\cos 2t\cdot U(t-2)$$

14

(6) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+6s+13}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)=e^{-3t}\cdot\sin 2t$.

(7) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+6s+13}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+3)^2+2^2}\right)$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right)-\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)$$

1

$$=e^{-3t}\cdot\cos 2t-\frac{3}{2}\cdot e^{-3t}\cdot\sin 2t$$

14と15

$\boxed{2}$ (1) $f*g(t) = g*f(t) = \int_0^t g(t-s)\cdot f(s)\cdot ds$

$= \int_0^t s\cdot e^{t-s} ds = [-s\cdot e^{t-s}]_0^t + \int_0^t e^{t-s}\cdot ds$

$= -t + [-e^{t-s}]_0^t = -t - 1 + e^t$

また. $L(f*g) = L(f)\cdot L(g) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1}$

(2) $f*g(t) = g*f(t) = \int_0^t g(t-s)\cdot f(s)\cdot ds = \int_0^t s^2\cdot \sin(t-s)\cdot ds$

$= [-s^2\cdot(-\cos(t-s))]_0^t - \int_0^t 2s\cdot\cos(t-s)\, ds$

$= t^2 - [-2s\cdot\sin(t-s)]_0^t - \int_0^t 2\cdot\sin(t-s)\cdot ds$

$= t^2 - [-2(-\cos(t-s))]_0^t = t^2 - 2 + 2\cdot\cos t$.

また. $L(f*g) = L(f)\cdot L(g) = \frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}$ である.

(3) $f*g(t) = \int_0^t \sin(t-s)\cdot\cos s\cdot ds$

$= \int_0^t \frac{1}{2}(\sin t + \sin(t-2s))\cdot ds$

$= \frac{1}{2}[s\cdot\sin t]_0^t + \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cdot(-\cos(t-2s))]_0^t$

$= \frac{1}{2}t\cdot\sin t + \frac{1}{4}\cdot\cos(-t) - \frac{1}{4}\cos t$

$= \frac{1}{2}t\cdot\sin t + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos t$

$= \frac{1}{2}t\cdot\sin t$

一方. $L(f*g) = L(f)\cdot L(g) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}$