演習問題

[1] 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) t^4+3t^2+5　　(2) $e^{at}-e^{bt}$

(3) $(t^3-1)^2$　　(4) $\sin(\omega t+\theta)$

(5) $\cos^2 t$　　(6) $\cos\lambda(t-\mu)\cdot U(t-\mu)$　　$(\mu>0)$

[2] 次の関数の $f(t-\lambda)$ と $f(t+\lambda)$　$(\lambda>0)$ のラプラス変換を求めよ

(1) $f(t)=t$

(2) $f(t)=e^{\lambda t}$

(3) $f(t)=\sin t$

解答.

1 (1) $L(t^4+3t^2+5) = L(t^4)+3\cdot L(t^2)+5\cdot L(1)$

$$= \frac{4!}{s^5} + \frac{6}{s^3} + \frac{5}{s}$$

(2) $L(e^{at}-e^{bt}) = L(e^{at})-L(e^{bt})$

$$= \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}$$

(3) $L((t^3-1)^2) = L(t^6-2t^3+1)$

$$= \frac{6!}{s^7} - \frac{12}{s^4} + \frac{1}{s}$$

(4) $L(\sin(\omega t+\theta)) = L(\sin\omega t\cdot\cos\theta + \cos\omega t\cdot\sin\theta)$

$$= \cos\theta\cdot L(\sin\omega t) + \sin\theta\cdot L(\cos\omega t)$$

$$= \frac{\omega\cdot\cos\theta}{s^2+\omega^2} + \frac{s\cdot\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

(5) $L(\cos^2\theta) = L\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}$$

(6) $f(t)=\cos\lambda t$ とすると. $f(t-\mu)=\cos\lambda(t-\mu)\cdot U(t-\mu)$ より

$L(\cos\lambda(t-\mu)\cdot U(t-\mu)) = e^{-\mu s}\cdot F(s)$

$$= e^{-\mu s}\frac{s}{s^2+\lambda^2}$$

$\boxed{2}$ (1) $F(s)=\frac{1}{s^2}$ より

$$L(f(t-\lambda))=e^{-\lambda s}\cdot F(s)=e^{-\lambda s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$L(f(t+\lambda))=e^{\lambda s}\left(F(s)-\int_0^\lambda e^{-st}\cdot t\cdot dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot t\right]_0^\lambda-\int_0^\lambda\frac{1}{s}\cdot e^{-st}\,dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}e^{-\lambda s}\cdot\lambda+\frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^\lambda\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}e^{-\lambda s}\cdot\lambda+\frac{1}{s^2}e^{-\lambda s}-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{s}+\frac{1}{s^2}$$

(2) $F(s)=\frac{1}{s-\lambda}$ より

$$L(f(t-\lambda))=e^{-\lambda s}\cdot F(s)=\frac{e^{-\lambda s}}{s-\lambda}$$

$$L(f(t+\lambda))=e^{\lambda s}\cdot\left(F(s)-\int_0^\lambda e^{-st}\cdot e^{\lambda t}\cdot dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s-\lambda}-\int_0^\lambda e^{(\lambda-s)t}\cdot dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s-\lambda}-\left[\frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)t}\right]_0^\lambda\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s-\lambda}-\frac{1}{\lambda-s}\left(e^{\lambda^2-s\lambda}-1\right)\right)$$

$$=\frac{e^{\lambda^2}}{s-\lambda}$$

(3) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ より

$$L(f(t-\lambda)) = e^{-\lambda s} \cdot F(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{s^2+1}$$

$$L(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s} \cdot \left(F(s) - \int_0^\lambda e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt \right)$$ である

ここで.

$$\int_0^\lambda e^{-st} \sin t \, dt = \left[-e^{-st} \cos t \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda -s \cdot e^{-st} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$= \left(-e^{-\lambda s} \cdot \cos\lambda + 1 \right) + \left[-s \cdot e^{-st} \cdot \sin t \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda -s^2 e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt$$

$$= -e^{-\lambda s} \cdot \cos\lambda + 1 - s \cdot e^{-\lambda s} \cdot \sin\lambda - s^2 \int_0^\lambda e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt$$ となる

$$\therefore \int_0^\lambda e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1 - e^{-\lambda s}(\cos\lambda + s \cdot \sin\lambda)}{s^2+1}$$ である これより

$$L(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s} \cdot \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1 - e^{-\lambda s}(\cos\lambda + s \cdot \sin\lambda)}{s^2+1} \right)$$

$$= \frac{\cos\lambda + s \cdot \sin\lambda}{s^2+1}$$ である.