

応用数学I 平成22年度前期 期末試験問題

1. 変数 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式を解きなさい。(各10点)

(1) $y' = -\frac{x}{y}, y(0) = 1$

(2) $y' = \frac{y^2 + 3x^2}{xy}$

(3) $(y^2 + e^x \sin y)dx + (2xy + e^x \cos y)dy = 0$

(4) $xy' + y = \sin x$

2. 変数 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y' + (2x + 1)y - y^2 = 1 + x + x^2$$

を, $y = x$ が解であることを利用して, 次の順序で解きなさい(20点)

(1) $z = y - x$ とおき, 変数変換を行い, ベルヌーイの微分方程式を導け.

(2) (1) で得られた微分方程式に, $w = \frac{1}{z}$ で変数変換を行い, 1階線形微分方程式を導け.

(3) (2) で得られた微分方程式を解け.

(4) もとの微分方程式の一般解を求めよ.

3. ガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad (s > 0)$$

について, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を証明せよ.(10点)

4. 変数 t の関数 $x = x(t)$ についての初期値問題

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 1$$

を解きなさい(15点)

5. 変数 t の関数 $x = x(t)$ についての境界値問題

$$x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

を解きなさい(15点)