期末試験解答

1. (1) 公式1より

$$\int y\,dy = \int -x\,dx.$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$ ここで $y(0)=1$ より

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}0^2 + C$$ となり $C = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ $x^2+y^2=1$ となる

(2) $y' = \dfrac{y^2+3x^2}{xy} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2+3}{\frac{y}{x}}$ より $v = \dfrac{y}{x}$ とおけば公式2より

$$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2+3}{v} - v\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{3}{v}.$$ $\therefore$ 公式1より

$$\int v\,dv = 3\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = 3\cdot\log x + c.$$

$$v^2 = \log x^6 + 2c.$$

$$e^{v^2} = e^{2c}\cdot x^6 = c\cdot x^6 \quad (e^{2c}\to c)$$ となる

$$\therefore\ e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c\cdot x^6$$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2+e^x\cdot\sin y) = 2y+e^x\cdot\cos y$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy+e^x\cos y) = 2y+e^x\cdot\cos y$ よりこれは完全. $\therefore$ 公式3より

$$u(x,y) = \int y^2+e^x\cdot\sin y\cdot dx + \int 2xy+e^x\cdot\cos y\cdot dy - \iint 2y+e^x\cdot\cos y\,dx\cdot dy$$

$$= xy^2+e^x\cdot\sin y = C$$ が解である.

(4) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} \sin x$ より 公式4を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{1}{x} \sin x \, e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\log x} \left(\int \frac{1}{x} \sin x \cdot e^{\log x} \cdot dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \sin x \cdot dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (-\cos x + C)$$ となる.

2.(1) $y = z + x$, $y' = z' + 1$ より 与式は.

$z' + 1 + (2x+1)(z+x) - (z+x)^2 = 1 + x + x^2$ より. 計算して.

$z' + z = z^2$ となる

(2). $z = w^{-1}$, $z' = -w' \cdot w^{-2}$ より

$-w' \cdot w^{-2} + w^{-1} = w^{-2}$

$w' - w = -1$ となる

(3) 公式4 より

$$w = e^{-\int -1 dx} \left(\int - e^{\int -1 dx} \cdot dx + C \right)$$

$$= e^{x} \left(\int -e^{-x} \cdot dx + C \right)$$

$$= e^{x} (e^{-x} + C) = C \cdot e^{x} + 1$$ である

(4). $z = \frac{1}{w} = \frac{1}{C \cdot e^{x} + 1}$

$y = z + x = \frac{1}{C \cdot e^{x} + 1} + x$ となる.

3. $\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^s\cdot dt$

$= \left[-e^{-t}\cdot t^s\right]_0^\infty + \int e^{-t}\cdot s\cdot t^{s-1}\,dt$

$= s\cdot\Gamma(s)$ より証明された．

4. 微分方程式をラプラス変換すると．

$s^2X(s)-s-1+2(sX(s)-1)+X(s)=\frac{1}{s-1}$

$(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s-1}+s+3=\frac{s^2+2s-2}{s-1}$

$X(s)=\frac{s^2+2s-2}{(s+1)^2(s-1)}$ となる．右辺を部分分数に分解すると．

$X(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2}$ となるので．

$x(t)=\frac{1}{4}e^t+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{3}{2}t\cdot e^{-t}$ となる

5. $x'(0)=c$ として．ラプラス変換すると．

$s^2X(s)-c+3sX(s)-4X(s)=0$．

$(s^2+3s-4)X(s)=c$

$X(s)=\frac{c}{s^2+3s-4}$ となる． さらに．

$X(s)=\frac{c}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+4}\right)$ とできるので．

$x(t)=\frac{c}{5}\left(e^t-e^{-4t}\right)$ である．ここで $x(1)=1$ より $c=\frac{5}{e-e^{-4}}$

$\therefore x(t)=\frac{e^t-e^{-4t}}{e-e^{-4}}$ となる．