6. 微分法則

(1) $L(f'(t)) = s\cdot F(s) - f(0)$

(2) $L(f^{(n)}(t)) = s^n\cdot F(s) - f(0)\cdot s^{n-1} - f'(0)\cdot s^{n-2} - \cdots - f^{(n-2)}(0)\cdot s - f^{(n-1)}(0)$

∵ $L(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f'(t)\,dt$

$= [e^{-st}\cdot f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -s\cdot e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt$

$= s\cdot F(s) - f(0)$

$L(f''(t)) = s\cdot L(f'(t)) - f'(0)$

$= s^2 F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$ となる.

以下くり返せばよい

<u>例題</u>. $L(t\cdot e^{\lambda t})$ を求めよ.

<u>答</u>. $f(t) = t\cdot e^{\lambda t}$ とすると $f'(t) = e^{\lambda t} + \lambda t\cdot e^{\lambda t}$, $f(0)=0$ である.

$\therefore L(f'(t)) = L(e^{\lambda t} + \lambda t\cdot e^{\lambda t}) = s\cdot L(t\cdot e^{\lambda t})$

これより $(s-\lambda)L(t\cdot e^{\lambda t}) = L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$ より

$L(t\cdot e^{\lambda t}) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$ となる

<u>問題</u> 次のラプラス変換を微分法則を用いて求めよ.

(1) $L(e^{\lambda t})$ (2) $\sin\lambda t$.

答 (1) $f(t) = e^{\lambda t}$ とすると $f'(t) = \lambda\cdot e^{\lambda t}$, $f(0) = 1$

$\therefore L(f'(t)) = L(\lambda e^{\lambda t}) = s\cdot L(e^{\lambda t}) - 1$.

これより $(s-\lambda)L(e^{\lambda t}) = 1$ となり

$L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$ となる.

(2) $f(t)=\sin\lambda t$ とすると. $f'(t)=\lambda\cdot\cos\lambda t$, $f''(t)=-\lambda^2\cdot\sin\lambda t$

$f(0)=0$, $f'(0)=\lambda$ より

$$L(f''(t))=-\lambda^2\cdot L(\sin\lambda t)=s^2\cdot L(\sin\lambda t)-\lambda$$

これより $(s^2+\lambda^2)L(\sin\lambda t)=\lambda$

$$L(\sin\lambda t)=\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$$ となる.

7. 像の微分法則.

(1) $L(-t\cdot f(t))=F'(s)$

(2) $L((-t)^n\cdot f(t))=F^{(n)}(s)$

∵ $$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$=\int_0^\infty -t\cdot e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$=L(-t\cdot f(t))$$

$F''(s)=L(-t\cdot f'(t))=L((-t)^2\cdot f(t))$ となる.

以下同様にできる.

<u>例題</u>. $L(t\cdot\cos\lambda t)$ を求めよ.

答 $f(t)=\cos\lambda t$ とおくと. $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\lambda^2}$ より

$$L(t\cdot\cos\lambda t)=-L(-t\cdot f(t))=-F'(s)$$

$$=-\frac{s^2+\lambda^2-2s^2}{(s^2+\lambda^2)^2}=\frac{s^2-\lambda^2}{(s^2+\lambda^2)^2}$$ である

<u>問題</u>　(1) $L(t\cdot\sin\lambda t)$ を求めよ

(2) $L(t\cdot e^{\lambda t})$ を求めよ

答. (1). $f(t)=\sin\lambda t$ とすると. $F(s)=\dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ より

$$L(t\cdot\sin\lambda t)=-L(-t\cdot f(t))=-F'(s)$$

$$=-\frac{-2\lambda s}{s^2+\lambda^2}=\frac{2\lambda s}{s^2+\lambda^2}$$ となる

(2) $f(t)=e^{\lambda t}$ とすると　$F(s)=\dfrac{1}{s-\lambda}$ より

$$L(t\cdot e^{\lambda t})=-L(-t\cdot f(t))=-F'(s)$$

$$=-\frac{1}{(s-\lambda)^2}$$ である

8. 積分法則.

(1) $L\left(\int_0^t f(\tau)\cdot d\tau\right)=\dfrac{1}{s}F(s)$

(2) $L\left(\int_0^t\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_1} f(\tau)\cdot d\tau d\tau_1\cdots d\tau_{n-1}\right)=\dfrac{1}{s^n}F(s)$

9. 像の積分法則.

(1) $L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty F(\sigma)\cdot d\sigma$

(2) $L\left(\dfrac{f(t)}{t^n}\right)=\int_s^\infty\int_{\sigma_{n-1}}^\infty\cdots\int_{\sigma_1}^\infty F(\sigma)\cdot d\sigma d\sigma_1\cdots d\sigma_{n-1}$ である.