§1. 微分方程式とその解.

微分方程式ってなに?

1. 等号で結ばれていて.
2. よくわかっていないもの(未知数)があり,
3. 大体は解を求めることが目的になる

よく知っている2次方程式を考えてみる.

例 未知数

$x^2-5x+6=0$ を解くと.

$(x-2)(x-3)=0$ より. $x=2,3$ となる

もとの式に代入すると等号が成立. ⟶ 解.

例. 2と3をもとの式に代入すると.

$2^2-5\cdot2+6=0$, $3^2-5\cdot3+6=0$ となる

それに対して.(常)微分方程式は次のようなものである.

例 $y=y(x)$ と y が x の式で表されているとき,

未知数

① $y'=\sin x+1$ ② $y''+y'+\sin y=0$ 未知数

$=\frac{dy}{dx}$ $=\frac{d^2y}{dx^2}$

のように. x, y やその何階かの導関数を含むものを

(常)微分方程式という. ここで未知数(未知式)は y である.

注意. 微分方程式の中に偏微分が入った偏微分方程式や.

2つ以上の微分方程式を含む連立微分方程式もあるが.

当面は常微分方程式しか扱わない.

注意. ①は1階微分方程式, ②は2階微分方程式といわれる.

n 階微分を含む微分方程式を n 階微分方程式という.

微分方程式の解について.

例えば、① $y' = \sin x + 1$ の両辺を x で積分すると.

$$\int y' dx = \int \sin x + 1 \, dx$$ より.

$$y = -\cos x + x + C$$ （Cは積分定数：以下Cのことを任意定数と表す）

となる：このように. $\boxed{y\text{が}x\text{の式で表せているものを解とする}}$

実際にこの解をもとの式①に代入すると.

$$\text{左辺} = y' = (-\cos x + x + C)' = \sin x + 1 = \text{右辺}$$

となり等号が成立していることがわかる.

問題 (1) $y = \cos 2x$ が $y' + 2\sin 2x = 0$ の解であることを示せ.

(2) $y = -\frac{1}{x+4}$ が $y' - y^2 = 0$ の解であることを示せ

(3) $y = e^{-x} + xe^{-x}$ が $y'' + 2y' + y = 0$ の解であることを示せ

答 (1) $\text{左辺} = y' + 2\sin 2x = (\cos 2x)' + 2\sin 2x$

$$= -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0 = \text{右辺}$$

より. 等号が成立するので. 解であることがわかる.

(2) $\text{左辺} = y' - y^2 = \left(-\frac{1}{x+4}\right)' - \left(-\frac{1}{x+4}\right)^2$

$$= \frac{1}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x+4)^2} = 0 = \text{右辺}$$

より等号が成立するので、解であることがわかる.

(3) $\text{左辺} = y'' + 2y' + y = (e^{-x} + xe^{-x})'' + 2\cdot(e^{-x} + x\cdot e^{-x})' + e^{-x} + xe^{-x}$

$$= (-e^{-x} + e^{-x} - x\cdot e^{-x})' + 2(-x\cdot e^{-x}) + e^{-x} + x\cdot e^{-x}$$

$$= -e^{-x} + xe^{-x} - 2x\cdot e^{-x} + e^{-x} + x\cdot e^{-x} = 0 = \text{右辺}$$

より 解であることがわかる.

xの式

注意. $y = y(x)$ と表される解を陽関数解という.

他に. $x^2+y^2=0$ のように. $\varphi(x, y)=0$ と表される陰関数解,

$x=x(\alpha)$, $y=y(\alpha)$ と違う文字 α を使って表される媒介変数表示解がある.

解について その2.

① 一般解.

$y=e^x$, $y=e^{-x}$ は両方とも $y''-y=0$ の解になっているが.

$\because$ 左辺 $= y''-y = (e^x)''-e^x = 0 =$ 右辺

左辺 $= y''-y = (e^{-x})''-e^{-x} = (-e^{-x})'-e^{-x} = e^{-x}-e^{-x} = 0 =$ 右辺

$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ も解になっている

(c_1, c_2 は任意定数) なんでもいい数.

→ このように. n 階微分方程式に対して.

n 個の任意定数を含む解を一般解という.

問題. (1) $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ は $y''-y=0$ の一般解であることを示せ

(2) $y = 2x^2 + c$ は $y' = 4x$ の一般解であることを示せ.

(3) $y = x^2 + c_1 \cdot x \cdot \log x + c_2 \cdot x$ は

$x^2 y'' - xy' + y = x^2$ の一般解であることを示せ.

答 (1) $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, $y'' = c_1 e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ より.

左辺 $= y''-y = c_1 e^x + c_2 \cdot e^{-x} - (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = 0 =$ 右辺

より. 一般解であることがわかる.

(2) 左辺 $= y' = (2x^2+C)' = 4x =$ 右辺

より、一般解であることがわかる

(3) $y' = 2x + C_1(\log x + 1) + C_2$

$y'' = 2 + C_1 \cdot \frac{1}{x}$ より

左辺 $= x^2y'' - xy' + y = 2x^2 + C_1 x - 2x^2 - C_1(x\log x + x) - C_2 x$

$+ x^2 + C_1 x \log x + C_2 x$

$= x^2 =$ 右辺.

となり、一般解であることがわかる.

② 特殊解（特解）

先ほど、$y'' - y = 0$ の一般解は. $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ であったが.

さらに次の条件を加えてみる.

☆ … $x = 0$ のとき, $y = 1$, $y' = 1$ （$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ ともかく）

すると. $y' = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot e^{-x}$ の x に 0 を代入することで.

$1 = y'(0) = C_1 \cdot e^0 - C_2 \cdot e^{-0} = C_1 - C_2$.

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ の x に 0 を代入することで.

$1 = y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 e^{-0} = C_1 + C_2$ を得る.

これを. C_1, C_2 の連立方程式と思ってとくと. $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ となり.

条件☆をみたす解は $y = e^x$ となる

このように.一般解のすべての任意定数に特定の値を入れて得られる解を特殊解という.

特殊解を求める問題を初期値問題, ☆のような条件を初期条件という.

問題. (1) $y'' - y = 0$ の解で初期条件 $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$ をみたす特殊解を求めよ

(2) $y' = 4x$ の一般解は $y = 2x^2 + C$ であったが.

これに初期条件 $y(\sqrt{2}) = 5$ を加えたときの特殊解を求めよ.

(3) $x^2 \cdot y'' - xy' + y = x^2$ の一般解は $y = x^2 + C_1 \cdot x \cdot \log x + C_2 x$ であったが.

これに初期条件 $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$ を加えたときの特殊解を求めよ.

答. (1) さきほどの計算と同様に.

$$4 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$2 = y'(0) = C_1 - C_2$$ となる. これより $C_1 = 3$, $C_2 = 1$.

$\therefore$ $y = 3 \cdot e^{x} + e^{-x}$ が求める特殊解である.

(2) $5 = y(\sqrt{2}) = 4 + C$ より $C = 1$.

$\therefore$ $y = 2x^2 + 1$ が求める特殊解である.

(3) さきほどの計算を使うと.

$$2 = y(1) = 1 + C_2$$

$$2 = y'(1) = 2 + C_1 + C_2$$ より $C_1 = -1$, $C_2 = 1$

$\therefore$ $y = x^2 - x \cdot \log x + x$ が求める特殊解である.

③ 特異解.

一般解の形では表されない解を特異解という.

例 $(y')^2 - x \cdot y' + y = 0$ は一般解 $y = C \cdot x - C^2$ の他に

特異解 $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$, $y = \begin{cases} 0 & (x \geqq 0) \\ \dfrac{x^2}{4} & (x < 0) \end{cases}$ をもつ