

# 線形代数学 平成22年度前期 期末試験問題

注意：解答には途中計算や説明を必ず入れること．また，解答の順番は問わない．

1. 次のベクトルが1次独立であるかどうか判定せよ（10点）

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 次のベクトルが  $\mathbb{R}^3$  の基底であることを示せ（15点）

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 線形写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  と  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき， $\ker f$ ， $\ker g$ ， $\ker f \cap \ker g$ ， $\ker f + \ker g$  の次元をそれぞれ求めよ（20点）

4. 線形写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，基底  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  と基底  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  に関する  $f$  の表現行列を求めよ（20点）

5. 次の行列が対角化可能か判定し，可能であれば対角化せよ（35点）

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$