解答例.

1. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ なので、4つのベクトルは必ず1次従属.

2. $A = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{③-①\times 2}{\overset{②-①}{=}} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underset{③+②\times 3}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$= 3$ より v_1, v_2, v_3 は1次独立.

さらに $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ より $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底になる.

3. $\ker f \ni \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ をみたす.

$\therefore x + y + 2z = 0$ である. これを解くと一般解は $x = t,\ z = s$ として

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-2s \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である. これより $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore \dim \ker f = 2$ である.

$\ker g \ni \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ をみたす.

$\therefore x + 2y - 3z = 0$ である. これを解くと一般解は $y = t,\ z = s$ として

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t+3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である. これより $\ker g = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore \dim \ker g = 2$ である.

$\ker f \cap \ker g$ の元は前の2つを両方みたすものなので

$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ である. これより $y=5z$, $x=-7z$ となる.

∴ $z=t$ とおけば一般解は.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7t \\ 5t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり $\ker f \cap \ker g = \left\langle \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

∴ $\dim(\ker f \cap \ker g) = 1$ である.

これらより. $\dim(\ker f + \ker g) = \dim \ker f + \dim \ker g - \dim(\ker f \cap \ker g) = 3$.

4. $f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{11}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$f(v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

以上より f の表現行列 A は

$A = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ である

5. (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$ より 固有値は1. 重複度は3.

ここで. $\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ より

$\dim V(1) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rank}(E-A) = 2 \neq 3$ (=重複度) となり 対角化不可能

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1)-t-t = t(t-2)(t+1)$

より固有値は $0, 2, -1$ である. 異なる3つの固有値をもつので対角化可能

ここで. 固有値 0 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ が挙げられる

固有値 2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ が挙げられる.

固有値 -1 の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ が挙げられる.

これより $P=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすれば.

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ となる.