ちょっと寄り道

線形写像の例を2つ挙げてみる.

$V = \{$微分可能な$\mathbb{R}$上の関数全体$\}$.

$T = \frac{d}{dx}$: 微分作用素　　とする.

例えば 微分方程式

$y'' + y' + y = 3$　　を考えると. これは.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{d}{dx}y + y\right) = 3$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} + \frac{d}{dx} + 1\right)y = 3$$

$$(T^2 + T + 1_V)\cdot y = 3$$　　とTを使って表せる.

⟶ 微分方程式ではなく. 線形代数のやり方で解くことが考えられる.

電子の時刻 $t=0$ における状態を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で表すことができ. さらに.

時刻 $t=t_0$ における状態は. 行列Aを使って.

$e^{it_0A}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　で表せる. ここで. e^{it_0A} は線形写像.

線形写像の表現行列 :

Vの基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, Wの基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ をとっておく.

$f: V \to W$ に対し. V, Wの基底を固定して考えるとき,

$f: V\{v_1, \cdots, v_n\} \longrightarrow W\{w_1, \cdots, w_m\}$ と表す.

$x \in V$ は $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を使って.

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ と表せた.

これをfで写したものを考えると.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) \\ &= f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \cdots + f(x_n v_n) \\ &= x_1 \cdot f(v_1) + x_2 \cdot f(v_2) + \cdots + x_n \cdot f(v_n) \end{aligned}$$ とできる.

$\longrightarrow$ これは $f(x)$ が $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ で決まることを示している.

今. $f(v_j) \in W$ より. $\{w_1, \cdots, w_m\}$ を使って.

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \cdots + a_{mj} w_m = [w_1 \cdots w_m]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ とできる

これを使うと. $f(x)$ は次のように表せる.

$$f(x) = x_1 \cdot a_{11} w_1 + x_1 a_{21} w_2 + \cdots + x_1 a_{m1} w_m$$
$$+ x_2 a_{12} w_1 + x_2 a_{22} w_2 + \cdots + x_2 a_{m2} w_m$$
$$\vdots$$
$$+ x_n a_{1n} w_1 + x_n a_{2n} w_2 + \cdots + x_n a_{mn} w_m$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ x_2 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_n a_{m1} + x_n a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ここで、この A を、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{w_1, \cdots, w_m\}$ に関する

f の表現行列 という。 ⟶ f は A で表されている！

<u>例題</u>. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + 3z \\ 2x + 3y - z \end{bmatrix}$$ とする。ここで、

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ と } \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する、f の表現行列 A を求めよ.

答. まず. $f(v_1)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\frac{5}{2}w_1-\frac{3}{2}w_2=[w_1\ w_2]\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ とできる. 同様に.

$$\left(\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \text{ をとくと } a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2}\right)$$

$$f(v_2)=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\frac{9}{2}w_1-\frac{1}{2}w_2=[w_1\ w_2]\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$f(v_3)=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=3w_1-w_2=[w_1\ w_2]\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$ である

$$\therefore A=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 3\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$ である

問題. (1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+3y\\2x-y\end{bmatrix}$$ とする.

$\left\{v_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$ と $\left\{w_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right\}$ に関する

fの表現行列 Aを求めよ.

(2) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ を

$f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ とするとき.

$\{e_1, e_2\}$ と $\{e_1, e_2\}$ に関する fの表現行列 Aを求めよ.

答. (1) $f(v_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 7w_1 - w_2 = [w_1 \ w_2]\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = 21w_1 - 10w_2 = [w_1 \ w_2]\begin{bmatrix} 21 \\ -10 \end{bmatrix}$ より

$A = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$ である

(2) $f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(e_2) = f\left(2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ である

命題 5.7.

(1) $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \to V\{v_1, \cdots, v_n\}$ の表現行列は E_n.

(2) $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \to V\{v_1', \cdots, v_n'\}$ の表現行列は.
$\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列.

(3)

$$\begin{array}{ccc} f : V\{v_1, \cdots, v_n\} & \xrightarrow{A} & W\{w_1, \cdots, w_m\} \\ \downarrow P & & \downarrow Q \\ f : V\{v_1', \cdots, v_n'\} & \xrightarrow{B} & W\{w_1', \cdots, w_n'\} \end{array}$$

とする. ただし. A, B は表現行列.

P, Q はそれぞれ $\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列.
$\{w_1', \cdots, w_n'\}$ から $\{w_1, \cdots, w_n\}$ への基底の変換行列.

このとき. $QA = BP$ が成り立つ. (つづく)

とくに，

$$\begin{array}{ccc} f: V\{v_1,\cdots,v_n\} & \xrightarrow{A} & V\{v_1,\cdots,v_n\} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ V\{v_1',\cdots,v_n'\} & \xrightarrow{B} & V\{v_1',\cdots,v_n'\} \end{array}$$

の場合，$A=P^{-1}BP$．

⊙ (1) は省略

(2) 基底の変換行列を P とすれば，

$[v_1\cdots v_n] = [v_1'\cdots v_n']\cdot P$ より． $x=[v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ に対し

$1_V x = x = [v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = [v_1'\cdots v_n']\cdot P\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ よりわかる

(3) $x=[v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ とすると． $[w_1\cdots w_m]=[w_1'\cdots w_m']Q$ より．

$f(x)=[w_1\cdots w_m]A\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = [w_1'\cdots w_m']QA\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$． となる．一方．

$$f(x)=f\left([v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}\right)=f\left([v_1'\cdots v_n']P\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)$$

$$=[v_1'\cdots v_n']\cdot BP\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

より． $QA=BP$ である．

さらに $Q=P$ なら　$PA=BP$ より　$A=P^{-1}BP$ となる