# 線形代数学　中間テスト演習

1. 次の行列の行列式を求めよ（各 10 点）.

$$(1)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^3$ において，$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ（15 点）.

3. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2$ を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + w = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = w \\ x + y + z + w = 0 \end{array} \right\}$$

とするとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元を求めよ（20 点）.

4. 次のベクトルが 1 次独立であるかどうか判定せよ（15 点）.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

5. 次のベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ（15 点）.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. $\mathbb{R}^3$ の二つの基底を

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ（15 点）.

答 1.(1) $2\cdot 3-2\cdot 1=4$

(2) $(10+12-2)-(-4+10+6)=8$

2. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解くと.

$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(-x-y+z) \\ b=y-x \\ c=\frac{1}{2}(5x-y-z) \end{cases}$ となり $\forall\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ は

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{2}(-x-y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+(y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}(5x-y-z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の1次結合で表せる. $\therefore$ 生成系である

3. $\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 4x+3y+2z+w=0 \end{cases}$ を解くと. $\begin{cases} x=z+2w \\ y=-2z-3w \end{cases}$ より.

$z=t,\ w=s$ とおいて. 一般解は.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t+2s \\ -2t-3s \\ t \\ s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

$\therefore W_1=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ より $\dim W_1=2$.

$\begin{cases} x=w \\ x+y+z=w=0 \end{cases}$ を解くと. $\begin{cases} y=-2z-w \\ x=w \end{cases}$ より

$z=t$, $w=s$ とおいて. 一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である

$$\therefore W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$ より $\dim W_2 = 2$.

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 4x+3y+2z+w=0 \\ x=w \\ x+y+z+w=0 \end{cases}$$ を解くと $$\begin{cases} x=w \\ y=-w \\ z=-w \end{cases}$$ より. $w=t$ とおいて 一般解は.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である $\therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3$ である.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ とすると.

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{②-①\times 2,\ ③-①}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

∴ 1次独立である.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ とすると.

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \overset{③-\frac{1}{2}\times①,\ ②-\frac{1}{2}\times①}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{③+②\times\frac{11}{7}}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = 3.$$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は1次独立. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ より $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底である.

6. 基底の変換行列 $T$ は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} T$$ をみたす.

$$\therefore T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ である.