

系 6.7. A が異なる n 個の固有値をもてば, A は対角化可能

① 定理 6.4 (1) より 各固有値の固有ベクトルは 1 次独立

定理 6.6 (2) をみたすので, A は対角化可能

例題. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ が対角化可能か判定し, 可能なら対角化せよ.

答. $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - 2t = t(t-2)(t+1)$ より

固有値は $0, 2, -1$ であり異なる 3 つの固有値をもつので A は対角化可能

固有値 0 の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる}$$

固有値 2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる}$$

固有値 -1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる. 以上より}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば} \quad P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$

問題 次の行列が対角化可能か判定し、可能なら対角化せよ

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{答 (1)} \quad \varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -3 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 9 = (t-4)(t+2)$$

より固有値は 4 と -2. 異なる2つの固有値をもつので、A は対角化可能.

ここで固有値 4 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{よ} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる}$$

固有値 -2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{よ} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる. 此よ}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば.} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$

$$(2) \quad \varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 \cdot (t+3) + 2(t-2) + 2(t-2) \\ = (t-2)(t+2)(t-1)$$

より固有値は 1, 2, -2. 異なる3つの固有値をもつので、A は対角化可能.

ここで固有値 1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{よ} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる.}$$

固有値 2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる}$$

固有値 -2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる} \quad \text{これより}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とおけば} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$

例題. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ が対角化可能か判定し、可能なら対角化せよ.

$$\text{答. } \varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3) + 4 + 4 + 2t + 2t - 4(t+3) \\ = (t-1) \cdot (t+2)^2$$

∴ 固有値は 1 と -2.

$\dim V(1) = 1$ はわかっているから、 $\dim V(-2) = 2$ であれば対角化可能. したがって、

$$\text{rank}(-2E - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{より}$$

$\dim V(-2) = 3 - \text{rank}(-2E - A) = 2$ となり対角化可能.

ここで固有値 1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{よ) } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる.}$$

$V(-2)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{よ) } \begin{cases} -2y + 2z = -2x \\ x - 3y + z = -2y \\ 2x - 2y = -2z \end{cases} \quad \text{となる. これを解くと.}$$

$x = t, y = s$ とおくと. $z = -x + y$ よ) 一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t + s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{よ) } V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{(お)}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{よければ. } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$

問題 次の行列が対角化可能か判定し. 可能であれば対角化せよ

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{答 (1) } \varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 \quad \text{よ) 固有値は 1.}$$

$$\text{rank}(E-A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{よ)}$$

$\dim V(1) = 3 - 1 = 2. \quad \therefore$ 対角化できない

$$(2) \varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^3 - 2 - 3(t-2) = (t-1)^2(t-4).$$

よ) 固有値は 1 と 4. こゝで

$$\text{rank}(E-B) = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{よ)}$$

$\dim V(1) = 3 - 1 = 2$ であり, B は対角化可能. $V(1)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{よ) } \begin{cases} 2x+y+z=x \\ x+2y+z=y \\ x+y+2z=z \end{cases} \quad \text{となる.}$$

$x=t, y=s$ とおけば, $z = -s-y$ よ) 一般解は.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{よ) } V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{となる}$$

固有値 4 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{よ) } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば } P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$