§3. 行列の対角化

線形変換 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$ とする.

$\{e_1, e_2\}$ と $\{e_1, e_2\}$ に関する f の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ である

ここで $\mathbb{R}^2$ を基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対し.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_1 = [u_1 \ u_2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1 \ u_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となるので.

f の $\{u_1, u_2\}$ と $\{u_1, u_2\}$ に関する表現行列は.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とできる.

また. $\{e_1, e_2\}$ から $\{u_1, u_2\}$ への基底の変換行列 P は

$[u_1 \ u_2] = [e_1 \ e_2]P$ より $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ である.

このとき命題 5.7 から

☆ … $B = P^{-1}AP$ の関係が成り立つ.

ここで. Bのように対角部分にのみ 0でない値が入る行列を対角行列といい.

☆のように Pを使って対角行列になるとき. fの対角化という.

($A = PBP^{-1}$ を対角化という場合もある)

固有値と固有ベクトル

線形変換 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し、

$$f(u) = \lambda u \qquad (u \neq 0)$$

をみたすスカラーを f の固有値といい、

u を固有値 λ に属する固有ベクトルという。

単に行列 A に対し、

$Au = \lambda u$ をみたすときも同様の言葉を使う。

ここで、$Au = \lambda u$ は

$(\lambda E - A)u = 0$ とも表せる。

すなわち、これをみたす u がとれるとすると、連立1次方程式の自明でない解が存在するので、

$|\lambda E - A| = 0$ となる（系3.20より，逆もいえる）。

すなわち、

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{である}$$

したがって、λ が A の固有値 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ である。

ここで、t を変数とする n 次多項式、

$\varphi_A(t) = |tE - A|$ を A の固有多項式といい、

$\varphi_A(t) = 0$ を A の固有方程式という。

$\longrightarrow$ λ が A の固有値 $\Leftrightarrow$ λ が $\varphi_A(t) = 0$ の解。

ここで、$\varphi_A(t)=0$ の解は複素数解を含めれば n 個ある.

以後、解の重複度を固有値の重複度という. まとめると次のようになる.

命題 6.1. (1) Aの固有値は $\varphi_A(t)=0$ の解であり,

重複度も込めて n 個ある

(2) 固有値λに属する固有ベクトルは

$(\lambda E-A)x=0$ をみたす自明でない x である.

例題. $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ の固有値を求め、固有ベクトルを1つ導け.

解答. $\varphi_A(t)=|t\cdot E-A|=\begin{vmatrix}t-2&-1&0\\-1&t-3&0\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\cdot\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-3\end{vmatrix}$

$=(t-2)\left((t-2)(t-3)-1\right)=(t-2)(t^2-5t+5)$ である.

これを解けば、固有値は $2,\ \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ である.

例えば固有値2に属する固有ベクトルは.

$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ となるベクトルであるので、これを解くと.

$\begin{cases}2x+y=2x\\x+3y=2y\\2z=2z\end{cases}$ より. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ となる. $\therefore \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は固有ベクトルである

問題 (1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値を求め固有ベクトルを1つ導け

(2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を求め.固有ベクトルを1つ導け

答 (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)-2=t^2-5+4$ より

$\varphi_A(t)=0$ を解けば、固有値は1と4である。

固有値1に属する固有ベクトルは.

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を解くと. $y=t$ とおいて. $x=-2t$ となり.一般解は

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が固有ベクトルになる。

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix}=t^2(t-1)+2-2t-2(t-1)=(t-1)(t+2)(t-2)$

より. $\varphi_B(t)=0$ を解けば.固有値は $1, 2, -2$ である.

固有値1に属する固有ベクトルは.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} x+2y-z=x \\ x+z=y \\ 2y=z \end{cases}$ となる.これを解くと.

$y=t$ とおいて. $z=2t$, $x=-t$ となり一般解は.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ となり. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が固有ベクトルになる