§1 線形空間

定義4.1 空でない集合 V に下の(I),(II)をみたす,

和と定数倍(スカラー倍)が与えられているとき、

V を線形空間,ベクトル空間といい,V の元をベクトルという

また x が V の元(ベクトル)であることを $x \in V$ という記号で表す.

(I) $\forall x, y, z \in V$ に対して 次が成り立つ

"任意の"という記号. これで、V のベクトルをなんでもいいから3つもってくる.という意味

(1) $x+y=y+x$

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

(3) ベクトル $\mathbb{0}$ で $\forall x \in V$ に対し

$x+\mathbb{0}=x$ となるものが存在する

このベクトル $\mathbb{0}$ (単に 0 とも書く)を零ベクトルという

(4) $\forall x \in V$ に対し.

$x+(-x)=\mathbb{0}$ となるベクトル $-x$ が存在する

これを x の逆ベクトルという

(II) $\forall x, y \in V$ と $\forall s, r \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ でもよい)に対し 次が成り立つ

(1) $(r+s)\cdot x = r\cdot x + s x$

(2) $r(x+y) = rx + ry$ ⟶ (I),(II)の条件は

(3) $(rs)x = r\cdot(sx)$ 普通に計算してよいことを

(4) $1\cdot x = x$. 表している.

注意. スカラーとして $\mathbb{R}$ を使うときは 実線形空間,

$\mathbb{C}$ を使うときは 複素線形空間 という.

例1. (1) n項ベクトルの集合

①の形のもので, ②の条件をみたすものを全て集めた集合.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$ は

ベクトルや行列にかっことして[ ]を使うが, ( )でもかまわない.

ベクトルの和とスカラー倍により線形空間になる.

このとき零ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ である.

(2) (m, n) 行列全体

$$M(m, n; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n \right\}$$ は,

行列の和とスカラー倍により線形空間になる.

このとき零ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは $\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$ である.

(3) 実数 $\mathbb{R}$ を係数にもつ x の多項式全体

$$\mathbb{R}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \}$$ は

自然数

多項式の和とスカラー倍により線形空間になる.

このとき零ベクトルは 0, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ の逆ベクトルは

$-a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$ である.

性質. (1) $\mathbb{0}$ ベクトルはただ1つ.

(2) $x \in V$ に対する逆ベクトルはただ1つ.

(3) $^\forall x, y \in V$ に対し. $x = y + z$ となるベクトル z がただ1つ存在する.

(4) $0 \cdot x = \mathbb{0}$, $r \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$, $(-1) \cdot x = -x$.

∵ (1) だけ証明する

$\mathbb{0}$ と $\mathbb{0}'$ を零ベクトルとすると.

$\mathbb{0} = \mathbb{0} + \mathbb{0}' = \mathbb{0}'$ となるので成立する.

(2)〜(4) は省略するが、いずれも証明が必要

定義4.2 Vの空でない部分集合が. 次の(1),(2)をみたすとき、

WをVの線形部分空間または部分空間という.

(1) $^\forall x, y \in W$ に対し, $x + y \in W$ である

(2) $^\forall x \in W$, $^\forall r \in \mathbb{R}$ に対し, $rx \in W$ である.

性質. Vの零ベクトル $\mathbb{0}$ は W にも含まれる.

∵ $x \in W$ に対し $-x = (-1) \cdot x \in W$ である.

∴ $\mathbb{0} = x + (-x) \in W$ になる.

例. (1). $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ を $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と同一視することで.

$\mathbb{R}^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる.

(2), 定義4.3.

$v_1, \cdots, v_n \in V$ と $s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{R}$ に対して作られる Vのベクトル

$v = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot v_i = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n$ を

$v_1, \cdots, v_n$ の 1次結合 という. また これら1次結合全体

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{ s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n \mid s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{R} \}$ を

$v_1, \cdots, v_k$ で 生成される部分空間 または 張られる部分空間 という.

∵ 部分空間であることの証明.

$\sum_{i=1}^{n} s_i v_i , \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ と $r \in \mathbb{R}$ に対し.

$(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i) + (\sum_{i=1}^{n} t_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i) v_i \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$

$r \cdot (\sum_{i=1}^{n} s_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} ((r s_i) \cdot v_i) \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ より

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ は部分空間である

(3). $\mathbb{R}^3$の部分集合 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ は $\mathbb{R}^3$の部分集合である.

条件式 $x+y+z=0$ を方程式だと思って解くと.

一般解は. $y=t, z=s$ と任意定数を使って. $x=-y-z$ とできることから.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と表すことができる

すなわち. $W = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

問題. (1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+2y+3z=0 \right\}$ とするとき.

W を例のように $\langle a, b \rangle$ のような形で表せ.

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{matrix} \right\}$ とするとき.

W を $\langle a, b \rangle$ のような形で表せ.

答 (1). $x+2y+3z=0$ を解くと. $y=t$, $z=s$ とおくことにより. 一般解は.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる

よって $W = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる

(2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ を解くと. $\begin{cases} y=-2z \\ x=z \end{cases}$ より. $z=t$ とおくことで

一般解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる

よって $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる.