応用数学　練習問題

1. 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$　　(2) $y' \sin x = y \cos x,\ y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

(3) $y^3 + x^6 y' = 0$　　(4) $xy' = x + y$

(5) $xy' + 2y = 3x,\ y(1) = 1$　　(6) $(3x + 2y + 1)dx + (2x - y - 4)dy = 0$

(7) $(\cos x + 2xy)dx + x^2 dy = 0$　　(8) $y' + y = x,\ y(0) = 0$

(9) $xy' + y = \sin x$　　(10) $xy' + 4y = x^{-4}$

2. かっこ内の変数変換を用いて，次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $xy' - e^{-xy} - y \quad (v = xy)$　　(2) $y' = (x + e^y - 1)e^{-y} \quad (xy^{-2})$

3. 次の微分方程式を解け．

(1) $y' = \dfrac{x - y - 1}{x - 2y - 1}$　　(2) $y' = \dfrac{6x - 2y - 3}{2x + 2y - 1}$

4. 次の全微分方程式について，与えられた関数が積分因子であることを示し，一般解を求めよ．

(1) $\sin y dx + \cos y dy = 0 \quad (e^x)$　　(2) $(3xy + 2y^3)dx + (xy^2 - x^2)dy = 0 \quad (xy^{-2})$

5. 次のベルヌーイの微分方程式を解け．

(1) $y' + xy = \dfrac{x}{y}$　　(2) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^3$

6. 微分方程式 $y' + (2x+1)y - y^2 = 1 + x + x^2$ を次の順序でとけ．ただし，$y = x$ が解であることを利用せよ．

(a) $z = y - x$ とおき，変数変換を行い，ベルヌーイの微分方程式を導け．

(b) (a) で得られた微分方程式に，$w = \dfrac{1}{z}$ で変数変換を行い，1 階線形微分方程式を導け．

(c) (b) で得られた微分方程式を解け．

(d) 一般解を求めよ．

7. $f(x, y) = xy$ が $D = \{(x, y) \,|\, 0 \le |x| \le a, 0 \le |y| \le b\}$ 上でリプシツ条件を満たすことを示せ．

8. 次の微分方程式の逐次近似解 $y_2(x)$ を求めよ．

(1) $y' = xy + 1,\ y(0) = 1$　　(2) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$

9. 次の関数のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてはいけない．

(1) $f(t) = 1$　(2) $f(t) = e^{\lambda t}$

(3) $f(t) = U(t-\lambda)$ $(\lambda > 0)$　(4) $f(t) = t^n$ (nは自然数)

10. 次の関数のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

(1) $f(t) = at^2 + bt + c$　(2) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda t}}$ $(\lambda > 0)$

(3) $f(t) = U(t-\lambda)$ $(\lambda > 0)$　(4) $f(t) = t^n$ (nは自然数)

(5) $f(t) = e^{\mu t} t^n$　(6) $f(t) = e^{\mu t} \sin \lambda t$

(7) $f(t) = t \sin \lambda$　(8) $f(t) = te^{\lambda t}$

(9) $f(t) = t * e^t$

11. 次の関数の $f(t+\lambda)$ と $f(t-\lambda)$ のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

(1) $f(t) = t$　(2) $f(t) = e^t$

12. 次の関数のラプラス逆変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

(1) $F(s) = \dfrac{1}{2s-1}$　(2) $F(s) = \dfrac{xe^{-3s}}{s^2+\lambda^2}$

(3) $F(s) = \dfrac{1}{(s-\lambda)^2}$　(4) $F(s) = \dfrac{2x+7}{s^2+5s+6}$

(5) $F(s) = \dfrac{3x^2-5s+4}{(s-1)^3}$　(6) $F(s) = \dfrac{5}{(s+2)(s^2+1)}$

(7) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+\lambda)}$　(8) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

13. 次の初期値問題を解け．

(1) $x'(t) - 3x(t) = e^{2t},\ x(0) = 2$

(2) $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

(3) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -3$

(4) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 1,\ x(0) = x'(0) = 0$

14. 次の境界値問題を解け．

(1) $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

(2) $x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1$

(3) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 3e^{2t},\ x(0) = 0,\ x(1) = e^2$