5月29日 練習問題 解答

① (1) 変形すると. $y' = x(y-1)$ とできる

よって. 変数分離形の公式より.

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int x\,dx$$ となる. 計算すると.

$$\log(y-1) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y-1 = e^{\frac{1}{2}x^2+C} = e^C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$ である.

ここで e^C を C とおきなおし.

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$ が求める解である.

(2). 変形すると. $y' = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}$ とできる. よって同次形の公式から. $v = \frac{y}{x}$ とおくと.

$$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2-1}{2v} - v\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-v^2-1}{2v}\right)$$ となる.

∴変数分離形の公式より.

$$-\int \frac{2v}{v^2+1}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$ となる. 計算すると.

$$-\log(v^2+1) = \log x + C$$

$$v^2 + 1 = e^{-\log x - C} = e^{-C} \cdot \frac{1}{x}$$ となる.

e^{-C} を C でおきかえ. $v = \frac{y}{x}$ を代入すると.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x}$$ より

$y^2 + x^2 = Cx$ を得る. 今 $y(1) = 1$ より.

$C = 2$ である. ∴求める解は $y^2 + x^2 = 2x$ である.

(3) まず, $\frac{d}{dy}(3x+2y+1)=2$.

$\frac{d}{dx}(2x-y-4)=2$ より, これは完全である.

∴ 完全微分方程式の公式より,

$$\int 3x+2y+1\,dx+\int 2x-y-4\,dy-\iint 2\,dx\,dy$$
$$=\frac{3}{2}x^2+2xy+x+2xy-\frac{1}{2}y^2-4y-2xy$$
$$=\frac{3}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2+x-4y=C$$ が解である.

両辺に2をかけ, 2C を C でおきなおすと,

$$3x^2+4xy-y^2+2x-8y=C$$ を得る.

(4). $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ より, 1階線形微分方程式の公式を使うと,

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$
$$=e^{-\log x}\cdot\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\log x}\cdot dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x\,dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right)$$ が解である.

(5). $y' = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot y$ より. 公式を使うと.

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ となる. これより

$\log y = \log \sin x + C$

$y = e^{\log \sin x + C} = e^{C} \cdot \sin x$ となる.

ここで, e^{C} を C でおきなおして.

$y = C \cdot \sin x$ を得る.

(6) $y' + y = x$ より. 公式を使うと.

$$y = e^{-\int 1 dx} \cdot \left(\int x \cdot e^{\int 1 dx} \cdot dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left(\int x \cdot e^{x} dx + C \right)$$

部分積分

$$= e^{-x} \left(x \cdot e^{x} - \int e^{x} dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(x \cdot e^{x} - e^{x} + C \right)$$

$$= C \cdot e^{-x} + x - 1$$ となる

今. $y(0) = 0$ であるので.

$0 = C \cdot e^{-0} + 0 - 1$ より $C = 1$ となる

∴, $y = e^{-x} + x - 1$ が求める解である.

No.

② (1). $y' + xy = x \cdot y^{-1}$ なので. aには -1 が入る.

∴ $z = y^2$ で変数変換を行うと. $y = z^{\frac{1}{2}}$ より.

$y' = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot z'$. を使って.

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z' + x \cdot z^{\frac{1}{2}} = x \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$$z' + 2xz = 2x$$ となる.

(2). 公式より

$$z = e^{-\int 2x\,dx}\left(\int 2x \cdot e^{\int 2x\,dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(\int 2x \cdot e^{x^2} dx + C\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(e^{x^2} + C\right)$$

$$= 1 + C \cdot e^{-x^2}$$ となる.

(3). $z = y^2$ であったので.

$y^2 = 1 + C \cdot e^{-x^2}$ が求める解である.

③ $\frac{d}{dy} e^x \sin y = e^x \cos y$, $\frac{d}{dx} e^x \cos y = e^x \cos y$ より.

e^x が積分因子であることがわかる. よって. 公式より.

$\int e^x \sin y\,dx + \int e^x \cos y \cdot dy - \iint e^x \cos y \cdot dx \cdot dy = C$ が解である.

計算すると. 左辺は.

$e^x \sin y + e^x \sin y - e^x \sin y = e^x \sin y$ となる

∴ $e^x \sin y = C$ が解である.

No.

④ $u = x - y$ とおくと. $y = x - u$ より.

$y' = 1 - u'$ とできる. これを用いて変数変換を行うと.

$1 - u' = u^2$ となる. これより

$u' = 1 - u^2$ として変数分離形の公式を使うと.

$\int \frac{1}{1-u^2} du = \int 1 \, dx + C$ となる. 計算すると 左辺は.

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u} du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} du$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+u) - \frac{1}{2}\log(1-u)$$

$= \log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}}$ となる. 右辺は $x + C$ なので整理すると.

$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{c} \cdot e^{x}$ となり.

$\frac{1+u}{1-u} = e^{2c} \cdot e^{2x}$ である. $u = x - y$ を代入し. e^{2c} を C でおきかえると.

$\frac{1+x-y}{1-x+y} = C \cdot e^{2x}$ となる

$\frac{1+x-y}{1-x+y} = \frac{2}{1-x+y} - 1$ より.

$$\frac{2}{1-x+y} = C \cdot e^{2x} + 1.$$

$$1 - x + y = \frac{2}{C \cdot e^{2x} + 1}$$

$y = \frac{2}{C \cdot e^{2x} + 1} + x - 1$ が解である.