No.

1.(1). 変数分離形の公式より.

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$

$x^2+y^2=2C$ となる. ここで, $y(1)=0$ より $C=\frac{1}{2}$ となり

$x^2+y^2=1$ となる

(2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{3x}{y}$ より. $v=\frac{y}{x}$ とおき同次形の公式を使うと.

$v' = \frac{1}{x}\left(v + 3\cdot\frac{1}{v} - v\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{3}{v}$ となる これより

$$\int v\,dv = 3\cdot\int \frac{1}{x}\,dx.$$

$$\frac{1}{2}v^2 = 3\cdot\log x + C$$

$$v^2 = 6\log x + 2C$$

$e^{v^2} = e^{2C}\cdot x^6$ となる

ここで, e^{2C} を C でおきかえ. $v=\frac{y}{x}$ を代入すると

$e^{\frac{y^2}{x^2}} = C\cdot x^6$ となる.

(3) $\frac{d}{dy}(3x+2y+1)=2$, $\frac{d}{dx}(2x-y-4)=2$ より.

この全微分方程式は完全である. ∴公式より

$$u(x,y) = \int 3x+2y+1\,dx + \int 2x-y-4\,dy - \iint 2\,dx\,dy$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2xy + x - \frac{1}{2}y^2 - 4y.$$

∴ $3x^2+4xy+2x-y^2-8y=C$ が解である.

(4). $y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y = \cos x$ より. 1階線形微分方程式の公式を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} \cdot \left(\int \cos x \cdot e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{\log \cos x} \cdot \left(\int \cos x \cdot e^{-\log \cos x} dx + C \right)$$

$$= \cos x \cdot \left(\int 1 \, dx + C \right) = (x + C) \cdot \cos x$$ となる.

2. (1). $z = y + x^2$ より $y = z - x^2$, $y' = z' - 2x$ である. これより.

$$x(z' - 2x) = x^4 + 2(z - x^2) - (z - x^2)^2$$

$$z' - 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) z = -\frac{1}{x} z^2$$ となる.

(2). $w = z^{-1}$ より $z = w^{-1}$, $z' = -w' \cdot w^{-2}$ である. これより

$$-w' \cdot w^{-2} - 2 \cdot \frac{x^2+1}{x} w^{-1} = -\frac{1}{x} w^{-2}.$$

$$w' + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) w = \frac{1}{x}$$ となる

(3) 公式より

$$w = e^{-\int 2(x+\frac{1}{x}) dx} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \cdot e^{\int 2(x+\frac{1}{x}) dx} \cdot dx + C \right)$$

$$= e^{-x^2 - 2\log x} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \cdot e^{x^2 + 2\log x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot e^{-x^2} \cdot \left(\int x \cdot e^{x^2} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right)$$ である.

(4). $w = \frac{1}{z}$, $z = y + x^2$ より

$$\frac{1}{y + x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-x^2} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right)$$ より

$$2x^2 \cdot e^{x^2} = (e^{x^2} + 2C)(y + x^2).$$ ここで $2C$ を C でおきかえて.

$$(e^{x^2} + C)(y + x^2) = 2x^2 \cdot e^{x^2}$$ となる.

3. $L^{-1}(F(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = t * \sin t$

$$= \int_0^t s \cdot \sin(t-s)\,ds$$

$$= \left[s\cos(t-s)\right]_0^t - \int_0^t \cos(t-s)\,ds$$

$$= t + \left[\sin(t-s)\right]_0^t = t - \sin t$$ となる.

4. 像方程式を求めると.

$$s^2X(s) - 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s}$$ より

$$X(s) = \frac{1}{s^2-3s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right)$$ となる.

$\therefore x(t) = L^{-1}(X(s)) = \frac{1}{2}\left(1 - 2e^t + e^{2t}\right)$ である.

5. $x'(0) = C$ とおき、像方程式を求めると.

$$s^2X(s) - C - 6sX(s) + 10X(s) = 0$$ より

$$X(s) = \frac{C}{s^2-6s+10} = \frac{C}{(s-3)^2+1}$$ となる

$\therefore x(t) = L^{-1}(X(s)) = C \cdot e^{3t} \cdot \sin t$ であるが.

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ より $C = e^{-\frac{3}{2}\pi}$ である.

$\therefore x(t) = e^{3t-\frac{3}{2}\pi} \cdot \sin t$ となる.