§4. ラプラス変換

$[0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ と実数 s に対して、無限積分

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

が収束するとき、この値は s の関数としてみることができる.

この関数を、$F(s)$, $L(f(t))$, $L(f)$ などで表し.

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

と書くことにする.

ここで、この関数を $f(t)$ のラプラス変換という.

$F(s) = L(f)$ を $f(t)$ の像関数, $f(t)$ を原関数という.

例題. $f(t) = t$ のラプラス変換と、それが収束する s の範囲を求めよ.

答. $\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ を計算すると.

部分積分

$$\int_0^T e^{-st} \cdot t\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st} \cdot t\right]_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sT} \cdot T - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^T$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sT} \cdot T - \frac{1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \quad (s \neq 0) \text{ である.}$$

ここで、$s > 0$ ならば、$T \to \infty$ とすれば、これは収束して.

$F(s) = \frac{1}{s^2}$ となる.

また、$s < 0$ ならば、これは収束しない.

$s = 0$ のときは $\int_0^T t\,dt$ を考えるが、これも収束しない.

∴収束する s の範囲は $s > 0$ であり、ラプラス変換は $F(s) = \frac{1}{s^2}$ である.

問題. 次の関数のラプラス変換と収束するSの範囲を求めよ.

(1) $f(t)=1$, (2) $f(t)=e^{\lambda t}$ (λは実数) (3) $\sin\lambda t$ ($\lambda>0$)

答 (1) $s=0$ のとき $\int_0^\infty 1\,dt$ は収束しない.

$s\neq 0$ のとき.

$$\int_0^T e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^T=-\frac{1}{s}e^{sT}+\frac{1}{s}$$ である.

∴ $s>0$ のときに収束し. ラプラス変換は $F(s)=\frac{1}{s}$ である.

(2) $$\int_0^T e^{-st}\cdot e^{\lambda t}dt=\int_0^T e^{(\lambda-s)t}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda-s}\left[e^{(\lambda-s)t}\right]_0^T=\frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)T}+\frac{1}{s-\lambda}$$ より.

$s>\lambda$ のときに収束し, ラプラス変換は $F(s)=\frac{1}{s-\lambda}$ である.

(3) $I_s=\int e^{-st}\sin\lambda t\,dt$ とおいて. 不定積分を求めると.

$$I_s=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cdot\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda}\int e^{-st}\cdot\cos\lambda t\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cdot\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda^2}e^{-st}\sin\lambda t-\frac{s^2}{\lambda^2}\int e^{-st}\sin\lambda t\cdot dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda^2}e^{-st}\sin\lambda t-\frac{s^2}{\lambda^2}I_s$$ となることから.

$$I_s=\frac{-e^{-st}}{s^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t+s\sin\lambda t)$$ となる.

∴ これは $s>0$ のときに収束し. ラプラス変換は.

$$F(s)=\left[I_s\right]_0^\infty=\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$$ となる.

定理. $f(t)$ のラプラス変換が s_0 に対して存在すれば,

$s > s_0$ である全ての s に対し, ラプラス変換が存在する.

∵ $f(t) > 0$ の場合だけ証明する.

$0 \leqq \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \leqq \int_0^T e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ となるが.

これらは. T に対して単調増加であり. さらに右辺は $F(s_0)$ に収束している.

よって. $\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ も $T \to \infty$ とすれば収束する.

この定理から. ある α が存在して.

$s > \alpha$ で $F(s)$ は収束して. $\alpha > s$ で $F(s)$ は収束しない. とできる.

(ただし. 全ての s で収束するとき. $\alpha = -\infty$, 全ての s で収束しないときは. $\alpha = \infty$ とする)

この α を $F(s)$ の収束座標といい.

$s > \alpha$ である s の範囲を収束域という.

以下収束域は省略して考える.

また. s の定義域についてもいちいち注意しない.