§3. 常微分方程式の解の存在

1階微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

この形を正規形という.

で与えられているとき、"微分方程式が解をもつか"という問題を考える.

a, b を正の定数として (x_0, y_0) を固定したとき,

$D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqq a,\ |y - y_0| \leqq b\}$ とする.

D 上で定義された連続関数全体を $C(D)$ で表す.

<u>Def</u>. $f(x, y) \in C(D)$ が, D 上でリプシッツ条件を満たすとは,

ある正数 K に対して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K|y_1 - y_2| \quad ((x, y_1), (x, y_2) \in D)$$

が成り立つことである

<u>例1</u>. $f(x, y) \in C(D)$ が, y について偏微分可能で,

$f_y(x, y)$ が, x, y について連続ならば,

$f(x, y)$ は D 上でリプシッツ条件をみたす.

$\because$ D 上で $|f_y(x, y)|$ の最大値を K とすると 平均値の定理から

$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi) \cdot (y_1 - y_2)$ であるので

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K|y_1 - y_2|$ となり

リプシッツ条件をみたす.

No.

例1.2. $f(x,y)=\sqrt{y}$ とおく.

$D=\{(x,y)\mid 0\leqq|x|\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$ としてリプシッツ条件をみたすと仮定すると,

ある正数Kが存在して,

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqq K|y_1-y_2|$ とできる.

一方 左辺は

左辺 $=|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|=\dfrac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}\cdot|y_1-y_2|$ とできる.

ここで $y_1\neq y_2$ であれば,

$K\geqq\dfrac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}$ が成り立つが,

$y_1, y_2\to 0$ とすると 右辺 $\to\infty$ であるので矛盾となる.

問題 (1). $D=\{(x,y)\mid 0\leqq|x|\leqq a,\ 0\leqq|y|\leqq b\}$ 上で.

$f(x,y)=xy$ がリプシッツ条件を満たすことを示せ.

(2). $D=\{(x,y)\mid |x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1\}$ 上で

$f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ がリプシッツ条件を満たさないことを示せ.

答. (1). $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|xy_1-xy_2|\leqq a\cdot|y_1-y_2|$ より

リプシッツ条件をみたす

(2) $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|\sqrt{1-y_1^2}-\sqrt{1-y_2^2}|$

$$=\frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{1-y_1^2}+\sqrt{1-y_2^2}}\cdot|y_1-y_2|$$

より. リプシッツ条件をみたさないことがわかる.

No.

定理（コーシー・リプシッツの定理）

$f(x,y) \in C(D)$ が、D上でリプシッツ条件をみたすとき、

微分方程式　$y' = f(x,y)$　には、初期条件 $y(x_0) = y_0$

を満たす解 $y = y(x)$ が、

閉区間　$|x - x_0| \leqq C = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ で ただ一つ存在する。

ただし $M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$　である。

∵ もし、解 $y = y(x)$ が存在すれば、

$y'(x) = f(x, y(x))$ をみたしている。

この式を積分してみると、

$\int_{x_0}^{x} y'(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$　とできるが、

左辺 $= y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$　より、

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$　を得る。

逆に、この積分方程式をみたす解は、求める解になる。

そこで、これを解くために、関数列 $y_0(x), y_1(x), \cdots, y_n(x), \cdots$ を、$|x - x_0| \leqq C$ で、

$y_0(x) = y_0$

$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx$　と定義する。

No.

$y_n(x)$ が定義できること.

$(x, y_n(x)) \in D$ であることを示す. ($|x-x_0| \leqq c$ で)

まず. $n=0$ のときは. $y_0(x)=y_0$ より 明らか.

次に. $(x, y_{n-1}(x)) \in D$ を仮定すると.

$$|y_n(x)-y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx \right|$$

$$\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x))|\, dx \right|$$

$$\leqq \int_{x_0}^{x} M\, dx \leqq M \cdot C. \leqq b.$$ より示された.

$y_n(x) \longrightarrow y(x)$ とできること.

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))\, dx \right|.$$

$$\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))|\, dx \right|$$

$$\leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|\, dx \right|.$$

とできる. これより.

$$|y_1(x)-y_0(x)| \leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx \right|.$$

$$\leqq M \cdot |x-x_0|$$

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(x)-y_0(x)|\, dx \right|$$

$$\leqq \frac{KM}{2!} \cdot |x-x_0|^2$$

以下同様にすると.

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqq \frac{K^{n-1} M}{n!} |x-x_0|^n$$ となる.

No.

これより. $y_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(y_{k+1}(x) - y_k(x) \right)$ は.

$|x - x_0| \leqq C$ で一様収束する.

$\therefore$ $y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$ が存在して連続関数になる.

また.

$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$ であったが,

この両辺に $\lim_{n \to \infty}$ をつけると.

$$y(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$$

$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$ となり. この $y(x)$ は解になる.

<u>$y = y(x)$ がただ一つの解であること</u>.

$\tilde{y}(x)$ も解であるとすると.

$\tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y}(x))\,dx$ をみたす. これより.

$|\tilde{y}(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y}(x)) - f(x, y(x))\,dx \right|$

$\leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |\tilde{y}(x) - y(x)|\,dx \right|$ となる.

今. N を $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ の最大値とすれば.

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq N \cdot K \cdot |x - x_0|$ となる. これを再び上の式に代入すれば.

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq \frac{NK^2}{2!} |x - x_0|^2$ となる.

以下同様に.

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq \frac{NK^n}{n!} \cdot |x - x_0|^n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$ となるので.

$\tilde{y}(x) = y(x)$ である.

No.

この証明の中で用いられた方法を逐次近似の方法という.

<u>例1</u>. $y' = xy$, $y(0)=1$ の逐次近似解 $y_2(x)$ を求めよ.

<u>答</u>. $y_0(x) = 1$.

$y_n(x) = 1 + \int_0^x x \cdot y_{n-1}(x)\, dx$ より.

$y_1(x) = 1 + \int_0^x x\, dx = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

$y_2(x) = 1 + \int_0^x x \cdot y_1(x)\, dx$

$= 1 + \int_0^x x + \frac{1}{2}x^3\, dx$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$ である.

<u>問題</u>. 逐次近似解 $y_2(x)$ を求めよ.

(1). $y' = xy + 1$, $y(0) = 1$

(2) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$

<u>答</u> (1) $y_0(x) = 1$.

$y_1(x) = 1 + \int_0^x x + 1\, dx = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$y_2(x) = 1 + \int_0^x x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 1\, dx = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$ である

(2). $y_0(x) = 0$

$y_1(x) = \int_0^x x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$

$y_2(x) = \int_0^x x^2 + \frac{1}{9}x^6\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9 \cdot 7}x^7$ である.