⑥ その他の1階微分方程式

(i) 因数分解できる場合.

n 個の1階微分方程式

$F_1(x,y,y')=0,\ F_2(x,y,y')=0,\ \cdots,\ F_n(x,y,y')=0$

の積からなる微分方程式

$F_1(x,y,y')\cdot F_2(x,y,y')\cdot\cdots\cdot F_n(x,y,y')=0$ を考える.

もし.各 i について.

$F_i(x,y,y')=0$ が一般解 $\varphi_i(x,y,C)=0$ を持つとすると.

この微分方程式の一般解は.

$\varphi_1(x,y,C)\cdot\varphi_2(x,y,C)\cdot\cdots\cdot\varphi_n(x,y,C)=0$ で与えられる.

∵ もし.$\varphi_1(x,y,C)\cdot\cdots\cdot\varphi_n(x,y,C)=0$ とすると.どれかの i で.

$\varphi_i(x,y,C)=0$ となっている.∴ $F_i(x,y,y')=0$ であり.

$F_1(x,y,y')\cdot\cdots\cdot F_n(x,y,y')=0$ が導ける.

注意.各 $\varphi_i(x,y,C)=0$ も一般解であるが,上の形のものは.より一般的な解である.

例題. $(y')^2+5y\cdot y'+6y^2=0$ を解け.

答. まず,左辺を因数分解すれば,

$(y'+2y)(y'+3y)=0$ となる.

ここで.それぞれの因数を 0 とおいて得られる微分方程式の解を求めると.

No.

$y'+2y=0$ より. $y=c\cdot e^{-2x}$.

$y'+3y=0$ より $y=c\cdot e^{-3x}$ となる.

∴ 一般解は.

$$(y-c\cdot e^{-2x})\cdot(y-c\cdot e^{-3x})=0$$ である.

問題. 次の微分方程式を解け

(1) $(y')^2-yy'-12y^2=0$

(2) $x^2(y')^2+3xy\cdot y'+2y^2=0$

答. (1) まず左辺を因数分解すれば,

$$(y'-4y)(y'+3y)=0$$ となる.

ここで,それぞれの因数を 0 とおいて得られる微分方程式の解を求めると.

$y'-4y=0$ より $y=c\cdot e^{4x}$

$y'+3y=0$ より $y=c\cdot e^{-3x}$ となる.

∴ 一般解は. $(y-c\cdot e^{4x})\cdot(y-c\cdot e^{-3x})=0$ である.

(2) 左辺を因数分解すると.

$$(xy'+y)(xy'+2y)=0$$ となる.

それぞれの因数を 0 とおいて得られる微分方程式の解を求めると.

$xy'+y=0$ より. $xy=c$

$xy'+2y=0$ より $x^2y=c$ となる

∴ 一般解は $(xy-c)(x^2y-c)=0$ である.

(ii) y または x について解ける場合.

与えられた微分方程式が $y=f(x,y')$ の場合.

まず, $y'=P$ とおき, 両辺を微分すると.

$$p=\varphi(x,p,p')\left(=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}\right)$$ となる.

これを. p についての1階微分方程式だと思って解き,

一般解 $\psi(x,p,c)=0$ が求まれば,

これと. $y=f(x,p)$ から p を消去した式が解になる.

(p を使っての媒介変数表示解になる場合もある.

$x=f(y,y')$ となっている場合.

$y'=p$ とおき, 両辺を y で微分すると.

$$\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}=\varphi\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)\quad\left(=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}\right)$$ となる.

これを解き, 一般解. $\psi(y,p,c)=0$ が求まれば.

これと. $x=f(y,p)$ から p を消去した式が解になる

<u>例題</u>. $p=xy-x$ の一般解を求めよ. ($p=y'$ である)

<u>答</u>. まず式を変形すると.

$$y=\frac{p}{x}+1$$ とできる

これを x で微分すると．

$$p = \frac{p'x - p}{x^2}$$ となる．これより．

$$p' = p\left(x + \frac{1}{x}\right)$$ とでき，これを解くと．

$$P = c \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$ を得る．

$$\therefore\ y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$ が解である．

<u>問題</u>．次の微分方程式を解け．

(1) $px = y - x$．

(2) $y = p\cos p - \sin p$ （媒介変数表示解になる）

<u>答</u>．(1)．$y = px + x$ より．両辺を微分すると．

$$p = p + p'x + 1.$$ となる．これより

$$p = -\log x + C$$ となる．

$$\therefore\ y = -x\log x + C \cdot x$$ が一般解である．

(2)．両辺を微分すると．

$$p = p'\cos p - p \cdot p'\sin p - p'\cos p$$ となる．これより．

$$-p'\sin p = 1$$ であるので．

$$x = \cos p + C$$ を得る

$$\therefore \begin{cases} x = \cos p + C \\ y = p \cdot \cos p - \sin p \end{cases}$$ が一般解である．

練習問題．次の微分方程式を解け．

1 (1) $y' = xy$

(2) $\dfrac{y^2}{x^2} + \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) \cdot y' = 0$

(3) $(3x + 2y + 1)dx + (2x - y - 4)dy = 0$

(4) $xy' + y = \sin x$.

2 $y' - 3xy + xy^2 = -2x$ を解け．

ただし，$y = 1$ が特殊解であることを利用せよ．

答 1 (1) $y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

(2) $y = e^{\frac{y}{x}}$

(3) $3x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 8y = C$

(4) $y = \dfrac{C - \cos x}{x}$.

2 $y = \dfrac{1}{C \cdot e^{-3x^2} + 1} + 1$