⑤ リッカティの微分方程式

特殊解がわかっている場合

$y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

$= c\varphi(x) + \psi(x)$ 　　で与えられていた。

ここで $\psi(x) = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$ なので

$\psi(x)$ を求めるのに、積分を2回行う必要がある。

しかし、もし、y_1 が特殊解であることがわかっている場合は、

$z = y - y_1$ とおいて、代入すると、

$z' = y' - y_1'$ より

$z' + y_1' + P(x)(z + y_1) = Q(x)$

$z' + P(x)z = 0$ を得る。

この形は変数分離形なので、解を得るのに、積分1回でよい。

さらに、もし、y_2 も特殊解であると分かっている場合

$y_1 = a_1\varphi + \psi$, $y_2 = a_2\varphi + \psi$ 　であるので

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(c - a_1)\varphi}{(a_2 - a_1)\varphi} = \frac{c - a_1}{a_2 - a_1}$$ となり

右辺を c でおきかえて

$y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ 　を得る。

ここでは積分を一回も行っていない。

→ 特殊解がわかると、計算が簡単になる。

リッカティの微分方程式
(Riccati)

(☆) $y' + P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 = 0$

の形の微分方程式をリッカティの微分方程式という.

Case 1 1つの特殊解 y_1 が知られている場合.

$z = y - y_1$ とおいて. ☆に代入する.

$y_1' + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 = 0$ と.

$z' = y' - y_1'$ に注意すると、

$(z' + y_1') + P(x) + Q(x)(z + y_1) + R(x)(z + y_1)^2 = 0$ より.

$z' + (Q(x) + 2R(x)y_1)z + Rz^2 = 0$ となり.

ベルヌーイの微分方程式を得る.

∴ $w = \frac{1}{z}$ とおけば、 $w' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$ より.

$w' - (Q(x) + 2R(x)y_1)w = R(x)$ と.

一階線形微分方程式を得る.

例題　$y' - 3xy + xy^2 = -2x$　を解け．

ただし、$y = 1$ が特殊解であることを利用せよ．

答．まず、$z = y - 1$ とおいて変数変換を行う．

$z' = y'$ に注意すると，

$z' - 3x(z+1) + x(z+1)^2 = -2x$　より，

$z' - xz = -xz^2$　を得る．これはベルヌーイ微分方程式である．

ここで，$w = \dfrac{1}{z}$ とおき、変数変換を行うと．

$w' + xw = x$　を得る．

これは1階線形微分方程式であるので、公式より

$$
\begin{aligned}
w &= e^{-\int x\,dx} \cdot \left(\int x \cdot e^{\int x\,dx} \cdot dx + c \right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot dx + c \right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(e^{\frac{1}{2}x^2} + c \right) \\
&= c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1
\end{aligned}
$$

を得る．

$\therefore\ z = \dfrac{1}{c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1}$　となり．

$y = \dfrac{1}{c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1} + 1$　を得る．

問題 1 $y' + (2x+1)y - y^2 = 1 + x + x^2$ を次の順序で解け.

ただし. $y = x$ が解であることを利用せよ.

(1). $z = y - x$ とおき、変数変換を行い.

ベルヌーイの微分方程式を導け.

(2) (1)で得られた微分方程式を. $u = \frac{1}{z}$ で変数変換を行い.

1階線形微分方程式を導け.

(3). 公式を使い. (2)で得られた式を解け.

(4). 一般解を求めよ.

2 $xy' = x^4 + 2y - y^2$ を解け.

ただし. $y = -x^2$ が解であることを利用せよ.

答. 四 (1). $z' = y' - 1$ より

$$z' + 1 + (2x+1)(z+x) - (z+x)^2 = 1 + x + x^2$$ より.

$$z' + z = z^2$$ を得る.

(2). $w' = -\frac{1}{z^2} z'$ より.

$$w' - w = -1$$ を得る.

(3). $$w = e^{-\int -1 dx} \left(\int (-1) \cdot e^{\int -1 dx} \cdot dx + c \right)$$
$$= e^{x} \left(\int -e^{-x} dx + c \right)$$
$$= 1 + c \cdot e^{x}$$ となる.

(4). (3) より. $z = \dfrac{1}{1 + c \cdot e^{x}}$ となり

$$y = \frac{1}{1 + c \cdot e^{x}} + x$$ を得る.

五. $z = y + x^2$ を使い変数変換を行うと.

$$xz' = 2z(1+x^2) - z^2$$ を得る.

さらに. $w = \frac{1}{z}$ を使い変数変換を行うと.

$$w' + \frac{2(1+x^2)}{x} w = \frac{1}{x}$$ を得る.

公式を用いてこれを解くと.

$$w = \frac{1}{2} x^{-2} + c \cdot x^{-2} \cdot e^{-x^2}$$ を得る.

これより. 解を求めると.

$$(y + x^2)(e^{x^2} + c) = 2x^2 \cdot e^{x^2}$$ となる.

Case 2. 2つの特殊解 y_1 と y_2 が知られている場合.

Case 1 より. 1 階線形微分方程式

$$w' - (Q(x) + 2R(x)y_1)w = R(x)$$ が得られている.

ここで. $w_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$ は この特殊解である.

∵ まず. $w_1' = \dfrac{-y_2' + y_1'}{(y_2 - y_1)^2}$ を使うと.

$$\begin{aligned}
&w_1' - (Q(x) + 2R(x)y_1)w_1 - R(x)\\
&= \frac{-y_2' - y_1'}{(y_2 - y_1)^2} - (Q(x) + 2R(x)y_1)\cdot\frac{1}{y_2 - y_1} - R(x)\\
&= \frac{1}{(y_2 - y_1)^2}\left(-y_2' + y_1' - (Q(x) + 2R(x)y_1)(y_2 - y_1) - R(x)(y_2 - y_1)^2\right)\\
&= \frac{1}{(y_2 - y_1)^2}\left(-y_2' - P(x) - Q(x)y_2 - R(x)y_2^2 + y_1' + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_2^2\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

注意：あわせて 0 を足している

より. w_1 は特殊解である.

∴ $v = w - w_1$ とおくと. $v' = w' - w_1'$ を代入することにより.

$$v' - (Q(x) + 2R(x)y_1)v = 0$$ を得る.

これは変数分離形 なので. 公式を使って解くと.

$$v = c\cdot\exp\left(\int Q(x) + 2R(x)y_1\,dx\right)$$ を得る

$\exp(f(x)) = e^{f(x)}$ のこと.
式をわかりやすく書くための記号

$$\therefore\ w = \frac{1}{y_2 - y_1} + c\cdot\exp\left(\int Q(x) + 2R(x)y_1\,dx\right)$$

$$z = \left(\frac{1}{y_2 - y_1} + c\cdot\exp\left(\int Q(x) + 2R(x)y_1\,dx\right)\right)^{-1}$$

(†)… $y = y_1 + \left(\dfrac{1}{y_2 - y_1} + c\cdot\exp\left(\int Q(x) + 2R(x)y_1\,dx\right)\right)^{-1}$ である.

No.

問. (十)を使って次を問け. ただし. かっこ内は特殊解である.

(1) $y' - 3xy + xy^2 = -2x$ 　　　 $(y=1,\ y=2)$

(2) $xy' = x^4 + 2y - y^2$ 　　　 $(y=x^2,\ y=-x^2)$

答 (1). (十)に $y_1=1,\ y_2=2$ を代入し. $Q(x)=-3x$. $R(x)=x$ を代入すると.

$$y = 1 + \left(\frac{1}{2-1} + C\cdot \exp\left(\int -3x + 2\cdot x\cdot 1\ dx\right)\right)^{-1}$$

$$= 1 + \left(1 + C\cdot \exp\left(\int -x\ dx\right)\right)^{-1}$$

$$= 1 + \left(1 + C\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{-1}$$ である.

(2). 式を変形すると.

$$y' - x^3 - \frac{2}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = 0$$ より.

$y_1 = -x^2,\ y_2 = x^2,\ Q(x) = -\frac{2}{x},\ R(x) = \frac{1}{x}$ を代入すると.

$$y = -x^2 + \left(\frac{1}{x^2-(-x^2)} + C\cdot \exp\left(\int -\frac{2}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}(-x^2)dx\right)\right)^{-1}$$

$$= -x^2 + \left(\frac{1}{2x^2} + C\cdot \exp\left(\int -\frac{2}{x} - 2x\ dx\right)\right)^{-1}$$

$$= -x^2 + \left(\frac{1}{2x^2} + C\cdot e^{\log x^{-2}}\cdot e^{-x^2}\right)^{-1}$$

$$= -x^2 + \frac{2x^2}{1+2C\cdot e^{-x^2}}$$ を得る.

これを整理すると.

$$(y+x^2)(e^{x^2}+C) = 2x^2\cdot e^{x^2}$$ となる.

No.

Case 3. 3つの特殊解 y_1, y_2, y_3 が知られている場合.

Case 1 より. 一般解は.

$$y = \frac{c\xi + \eta}{c\varphi + \psi}$$ の形で与えられている.

これより. $y_i = \dfrac{a_i\xi + \eta}{a_i\varphi + \psi}$ とおくと.

$$\frac{\dfrac{y - y_1}{y - y_2}}{\dfrac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}} = \frac{\dfrac{c - a_1}{c - a_2}}{\dfrac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}}$$ を得て. この右辺を c でおきかえると.

$$y = \frac{c y_2 (y_3 - y_1) - y_1 (y_3 - y_2)}{c(y_3 - y_1) - (y_3 - y_2)}$$ を得る.