## ④ 1階線形微分方程式

$P(x), Q(x)$ を連続関数として.

☆ $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の形の微分方程式を線形であるという.

定理. ☆の一般解は.

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C \right)$$ である.

これを公式として使う.

∵ まず. 解が存在すると仮定して. 解を $y$ とし.

$z = e^{\int P(x)dx} \cdot y$ とおく.

これを $x$ で微分すると.

☆に $e^{\int P(x)}dx$ をかけている.

$$\frac{dz}{dx} = e^{\int P(x)dx} \cdot P(x) \cdot y + e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}$$

上の式を積分した.

$\therefore z = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C$ であり.

$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C \right)$ となる.

逆に. $y$ を微分してみると.

$$\frac{dy}{dx} = - P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C \right)$$
$$+ e^{-\int P(x)dx} \cdot Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$
$$= - P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C \right) + Q(x)$$
$$= - P(x)y + Q(x)$$ となり 解であることがわかる.

No.

例題. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y' = x(1-y)$$

答. $y' + xy = x$ より. $P(x) = x$, $Q(x) = x$ に注意して公式を使うと.

$$y = e^{-\int x\,dx} \cdot \left( \int x \cdot e^{\int x\,dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left( \int x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx + c \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left( e^{\frac{1}{2}x^2} + c \right)$$

$$= 1 + c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$ が求める一般解である.

問題. 次の微分方程式の一般解を求めよ.（(3)は特殊解を求めよ）

(1) $y' + y = x$ （ヒント：部分積分を使う）

(2) $xy' + y = \sin x$

(3) $xy' + 4y = x^{-4}$, $y(1) = 1$

答.(1). 公式より一般解は.

$$y = e^{-\int 1\,dx} \cdot \left( \int x \cdot e^{\int 1\,dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left( \int x \cdot e^{x} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \left( x \cdot e^{x} - \int e^{x} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \left( x \cdot e^{x} - e^{x} + c \right)$$

$$= c \cdot e^{-x} + x - 1$$ である.

(2) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ より 公式を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \cdot \left( \int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot dx + C \right)$$

$e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$ を使う

$$= \frac{1}{x} \cdot \left( \int \sin x + C \right)$$

$$= \frac{C}{x} - \frac{\cos x}{x}$$ が一般解である.

(3) $y + \frac{4}{x}y = x^{-5}$ より 公式を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{4}{x}dx} \cdot \left( \int x^{-5} \cdot e^{\int \frac{4}{x}dx} \cdot dx + C \right)$$

$e^{\int \frac{k}{x}dx} = x^k$ を使う

$$= x^{-4} \left( \int x^{-1} dx + C \right)$$

$$= x^{-4} (\log x + C)$$ が一般解である.

今 $x = 1, y = 1$ を代入すると.

$$1 = 1^{-4} (\log 1 + C)$$ より

$C = 1$ を得る.

∴ 求める解は. $y = x^{-4}(\log x + 1)$ である.

ラグランジュの定数変化法 (公式を求める別解法)

まず, $Q(x) \equiv 0$ とおいて, ☆ を解いてみると.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y$$ より, 変数分離形 なので, 公式を使うと.

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$$ が 得られる.

ここで, $C$ を $v(x)$ でおきかえて.

$$y = v(x) e^{-\int P(x)dx}$$ が ☆ の一般解になるように求める

まず、両辺を微分すると.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} - v(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$ となるので.

これと. $y = v(x) e^{-\int P(x)dx}$ を ☆に代入すると.

$$\frac{dv}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} - v(x) P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + v(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x) = Q(x).$$ より

$$\frac{dv}{dx} = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)$$ となる.

よって積分すると.

$$v = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C$$ となり.

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$ を得る.

## ベルヌーイの微分方程式.

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \cdot y^a$$ $(a \neq 0, 1)$ をベルヌーイの微分方程式という.

これは非線形だが、$z = y^{1-a}$ とおくと線形になる.

∵ まず, $y = z^{\frac{1}{1-a}}$ に注意する. これを微分すると.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a} \cdot z^{\frac{1}{1-a} - 1} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-a} \cdot z^{\frac{a}{1-a}} \cdot \frac{dz}{dx}$$ となる. これらを代入すると.

$$\frac{1}{1-a} z^{\frac{a}{1-a}} \cdot \frac{dz}{dx} + P(x) \cdot z^{\frac{1}{1-a}} = Q(x) \cdot z^{\frac{a}{1-a}}$$ より.

$$\frac{dz}{dx} + (1-a) P(x) z = (1-a) Q(x)$$ を得る.

No.

この方法を使って．$y'+y+y^2=0$ を解いてみる．

まず，この式は $a=2$ の形であるので．

$z=\dfrac{1}{y}$ を使って変数変換を行うと．

$y=\dfrac{1}{z}$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ より．

$-\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$ となり

$\dfrac{dz}{dx}-z=1$ を得る．これは線形なので．公式より

$$z=e^{-\int -1dx}\left(\int 1\cdot e^{\int -1dx}\cdot dx+c\right)$$
$$=e^{x}\left(-e^{-x}+c\right)$$
$$=c\cdot e^{x}-1$$ を得る．

$\therefore\ y=\dfrac{1}{c\cdot e^{x}-1}$ が求める一般解である．

問題．次のベルヌーイの微分方程式を解け．

(1) $y'+xy=\dfrac{x}{y}$

(2) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^3$

答. (1). $z = y^2$ とおいて変数変換を行うと.

$$y = z^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dz}{dx}$$ より.

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dx} + x \cdot z^{\frac{1}{2}} = x \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$ となり

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2x$$ を得る. ∴公式より.

$$z = e^{-\int 2x\,dx} \cdot \left( \int 2x \cdot e^{\int 2x\,dx} + c \right)$$

$$= e^{-x^2} \cdot \left( e^{x^2} + c \right)$$

$$= 1 + c \cdot e^{-x^2}.$$

∴ $y^2 = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ が一般解である.

(2). $z = y^{-2}$ とおくと.

$$y = z^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dz}{dx}$$ より.

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = x^2 \cdot z^{-\frac{3}{2}}$$ となり

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = -2x^2$$ を得る ∴公式より.

$$z = e^{-\int -\frac{2}{x} dx} \cdot \left( \int -2x^2 \cdot e^{\int -\frac{2}{x} dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= x^2 \cdot \left( \int -2x^2 \cdot x^{-2} \cdot dx + c \right)$$

$$= x^2 \left( -2x + c \right)$$ が求まる.

∴ $y^{-2} = x^2 (-2x + c)$ より.

$x^2 \cdot y^2 \cdot (-2x + c) = 1$ が一般解である.