No. 　.　.　(　　)

③ 全微分方程式.

全微分.

x と y の関数 $u(x,y)$ が全微分可能であるとき. すなわち.

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon(h,k)$$

と表されるとき (ただし. A.B は定数, $\lim_{h,k\to 0}\varepsilon(h,k)=0$)

$u(x,y)$ は x と y について 偏微分可能で.

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$ となる.

このとき. u の全微分を.

$$\underbrace{du}_{\text{全体でふえる量}} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{x\text{方向の傾き}}\cdot \underbrace{dx}_{x\text{が少しふえる}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{y\text{方向の傾き}}\cdot \underbrace{dy}_{y\text{が少しふえる}}$$ で表す

もし. $u(x,y)=C$ であれば. du は常に 0 なので. 上の式は.

(†)… $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ とおいて.

(☆)… $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ となる

一般に. ☆の形の関係式を 全微分方程式 という.

さらに. (†) をみたす $u(x,y)$ が存在するとき.

全微分方程式は 完全である といい.

そのとき ☆を 完全微分方程式 という.

また. $u(x,y)=0$ を その 一般解 という.

定理．P, Q は．それぞれ x, y について偏微分可能で．

P_y, Q_x は連続であるとする．このとき．

$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$ が完全であるための必要十分条件は．

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ である．

∵ ① 完全であれば、 $u(x, y)$ が存在して．(＋) をみたす．

仮定から．P_y と Q_x は連続なので．

$P_y = u_{xy} = u_{yx} = Q_x$ である．

クレローの定理

② $P_y = Q_x$ であるとする．このとき．(＋)をみたすような次の関数を考える．

$u(x, y) = \int P\,dx + w(y)$ ← yの関数，xで偏微分すると 0 になる．

これは．$u_x = P$ をみたす．

もし．さらに $u_y = Q$ もみたしていたら，求めるものになるので．

$Q = u_y = \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}$ となっていたらうれしい．

逆にいえば、

$$\frac{\partial w}{\partial y} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P \cdot dx .$$

となるように．wをとりたい．

（単純に yで積分したいが、これが yだけの関数かがまだわかっていない．）．

次へ．つづく．

ここで、これが y だけの関数か確かめるために.

右辺を x で偏微分してみる.（0になったら y だけの関数である）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial}{\partial y} P\,dx = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int P\,dx$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

仮定より.

$\therefore\ w = \int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy$ とすれば、これは y だけの関数で、

$u(x, y) = \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy$ が求める式である.

これより完全であることがわかった //.

上で得た式を公式として使う. すなわち

公式 $u(x, y) = \int P\,dx + \int Q\,dy - \iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\cdot dy$

注意. 定理の中では連続であることが仮定されていたが、

実際には.もっとゆるい条件にかえることができる.

そのため この講義では.連続性を仮定せず、

定理や公式を用いてもよいこととする.

No.

例題　$(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$　の一般解を求めよ.

答. まず, $\frac{\partial}{\partial y}(x^2-4xy-2y^2)=-4x-4y$

$\frac{\partial}{\partial x}(y^2-4xy-2x^2)=-4y-4x$　よりこれは完全である.

∴公式より.

$$u(x,y)=\int x^2-4xy-2y^2\,dx+\int y^2-4xy-2x^2\,dy-\iint -4x-4y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}y^3-2xy^2-2x^2y+2x^2y+2xy^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}y^3$$　となり.

∴ $x^3-6x^2y-6xy^2+y^3=C$　が求める解になる.

問題　次の全微分方程式が完全であることを示し, 一般解を求めよ.

(1)　$(3x+2y+1)dx+(2x-y-4)dy=0$

(2)　$(\cos x+2xy)dx+x^2dy=0$

答 (1). $\frac{\partial}{\partial y}(3x+2y+1)=2$

$\frac{\partial}{\partial x}(2x-y-4)=2$　よりこれは完全である.

∴公式より

$$u(x,y)=\int(3x+2y+1)dx+\int(2x-y-4)dy-\iint 2\,dxdy$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2+x-4y$$　となり

$3x^2+4xy-y^2+2x-8y=C$　が求める解になる.

(2) まず.
$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x+2xy)=2x$$
$$\frac{\partial}{\partial x}x^2=2x$$
より. これは完全である.

∴公式より.

$$u(x,y)=\int \cos x+2xy\,dx+\int x^2\,dy-\iint 2x\,dx\,dy$$
$$=\sin x+x^2y$$ となる.

∴求める解は. $\sin x+x^2y=C$ である.

<u>積分因子をかけて完全になるケース</u>

$P\cdot dx+Q\cdot dy=0$ は完全ではないが.

適当な関数 $\mu(x,y)\neq 0$ をかけて.

$\mu\cdot P\cdot dx+\mu\cdot Q\cdot dy=0$ が完全になるとき.

μを.積分因子という. 一般解があれば.積分因子は存在するが.一意ではない.

<u>例題</u>. $(2xy^2-y)dx+x\cdot dy=0$ の一般解を求めよ.

<u>答</u>. まず.
$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^2-y)=4xy-1$$
$$\frac{\partial}{\partial x}x=1$$
より. これは完全ではない.

ここで. μとして. $\mu=x^m\cdot y^n$ をかけてみると.

$$(2\cdot x^{m+1}\cdot y^{n+2}-x^m\cdot y^{n+1})dx+x^{m+1}\cdot y^n dy=0$$

である. これが完全になるように、mとnを求めると.

No.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^{m+1} \cdot y^{n+2} - x^m \cdot y^{n+1}) = 2(n+2) \cdot x^{m+1} \cdot y^{n+1} - (n+1)x^m \cdot y^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^{m+1} y^n = (m+1)x^m \cdot y^n$$ より.

$m=0$, $n=-2$ とおけば完全になる.

$\therefore$ $(2x - \frac{1}{y})dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$ は完全であるので, 公式より.

$$u(x,y) = \int 2x - \frac{1}{y}\,dx + \int \frac{x}{y^2}\,dy - \iint \frac{1}{y^2}\,dx\,dy$$

$$= x^2 - \frac{x}{y}$$ となり.

$y(x^2 - c) = x$ が求める解である.

<u>問題</u>. 次の全微分方程式について, 与えられた関数が積分因子であることを示し, 一般解を求めよ.

(1) $\sin y \cdot dx + \cos y \cdot dy = 0$ (e^x)

(2) $(3xy + 2y^3)dx + (xy^2 - x^2)dy = 0$ (xy^{-2})

答 (1) $\frac{\partial}{\partial y} e^x \cdot \sin y = e^x \cdot \cos y$

$\frac{\partial}{\partial x} e^x \cdot \cos y = e^x \cdot \cos y$ より. e^x は積分因子である

$\therefore$ 公式より

$$u(x,y) = \int e^x \sin y \cdot dx + \int e^x \cos y\,dy - \int e^x \cos y \cdot dx \cdot dy$$

$$= e^x \sin y$$ となり

$e^x \sin y = c$ が求める解である.

No.

(2). まず. $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{-1}+2xy)=-3x^2y^{-2}+2x$

$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-x^3y^{-2})=2x-3x^2y^{-2}$

より完全になるので、xy^{-2} は積分因子である.

∴公式より

$$u(x,y)=\int 3x^2y^{-1}+2xy\,dx+\int x^2-x^3y^{-2}\,dy-\iint 2x-3x^2y^{-2}\,dxdy$$

$$=x^3y^{-1}+x^2y$$ となり.

$x^3+x^2y^2=c\cdot y$ が求める解となる.