② 同次形

$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ の形の微分方程式を 同次形 という.

→ 変数変換 $v = \frac{y}{x}$ を用いると, 変数分離形 になる.

∵ $y = v \cdot x$ より. 両辺を x で微分すると.

$y' = x \cdot v' + v$ となる. これを代入すると.

$xv' + v = F(v)$ より.

公式 $v' = \frac{1}{x}\left(F(v) - v\right)$ を得る.

例 $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ の一般解を求めよ.

答. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ よりこれは同次形である.

よって. $v = \frac{y}{x}$ とおけば, 同次形の公式より.

$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2 - 1}{2v} - v\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-v^2 - 1}{2v}\right)$ となる.

これより. 変数分離形の公式を使って計算すると.

$\int \frac{2v}{v^2 + 1}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$ より

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x)$

$\log(v^2 + 1) = \log x + C$.

$v^2 + 1 = e^{\log x + C} = e^C \cdot x$ となる. e^C を C でおきかえ. $v = \frac{y}{x}$ を代入すると.

$\frac{y^2}{x^2} + 1 = Cx$ より

$y^2 + x^2 = C \cdot x$ が求める一般解である.

No.

問題　次の微分方程式を解け.

(1) $xy' = x + y$

(2) $xy' + 2y = 3x$, $y(1) = 1$.

答 (1). $y' = 1 + \frac{y}{x}$ より. $v = \frac{y}{x}$ とおき、同次形の公式を使うと.

$v' = \frac{1}{x}(1 + v - v) = \frac{1}{x}$ とできる. これより両辺を積分して.

$v = \log x + C$ となる. よって.

$e^{v} = e^{C} \cdot x$ を得る. ここで e^{C} を C でおきなおし. $v = \frac{y}{x}$ を代入すると.

$e^{\frac{y}{x}} = C \cdot x$. を得る.

(2). $y' = -2 \cdot \frac{y}{x} + 3$ より. $v = \frac{y}{x}$ とおき、同次形の公式を使うと.

$v' = \frac{1}{x}(-2v + 3 - v) = -\frac{3}{x}(v - 1)$ とできる.

∴ 変数分離形 の公式を使い計算すると.

$$\int \frac{1}{v-1} dv = -3 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log(v-1) = -3 \log x + C$$

$v - 1 = e^{C} \cdot x^{-3}$ となる. ここで e^{C} を C でおきなおし. $v = \frac{y}{x}$ を代入すると.

$\frac{y}{x} - 1 = C \cdot x^{-3}$. より. $y = C \cdot x^{-2} + x$ となる.

今 $y(1) = 1$ であるので. $1 = C \cdot 1^{-2} + 1$. より $C = 0$.

∴ $y = x$ が求める解である.

変数変換で同次形になるもの

例　$y' = \dfrac{kx + ly + A}{mx + ny + B}$　を考える.

もし、AとBが0であれば同次形になるので、

AとBが0になるような変数変換を考える.

Case 1.　$kn - lm \neq 0$　のとき.

$\begin{cases} kx + ly + A = 0 \\ mx + ny + B = 0 \end{cases}$　の唯一の解　$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$　を使い.

$X = x - a$, $Y = y - b$　を使うと同次形になる.

∵　$x = X + a$, $y = Y + b$　を使うと.

$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{1} = \dfrac{dy}{dx}$　より.　与式は.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{kX + \overbrace{ka + lY + lb + A}^{0}}{mX + \underbrace{ma + nY + nb + B}_{0}} = \frac{kX + lY}{mX + nY}$$　となり同次形である.

Case 2 (参考)

$kn - lm = 0$　のとき.

$v = kx + ly + A$　とおき変数変換を行うと

変数分離形になる.

例題　$y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+5}$　を解け.

答.　$\begin{cases} 2x-y+1 = 0 \\ x-2y+5 = 0 \end{cases}$　を解くと　$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$　を得る.

∴ $X = x-1$, $Y = y-3$ で変数変換を行うと. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$ より.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X-Y}{X-2Y} = \frac{2-\frac{Y}{X}}{1-2\cdot\frac{Y}{X}}$$

とできる.

ここで $v = \dfrac{Y}{X}$ とおけば、同次形の公式より.

$$\frac{dv}{dX} = \frac{1}{X}\left(\frac{2-v}{1-2v} - v\right) = \frac{1}{X}\cdot\frac{2-2v+2v^2}{1-2v}$$

となる.

これより.変数分離形の公式を使うと.

$$\int \frac{1-2v}{1-v+v^2}\,dv = \int \frac{1}{X}\,dX.$$

$$\log(1-v+v^2) = -2\log X + C.$$

$1-v+v^2 = e^C X^{-2}$　となる. ここで e^C を C でおきなおし. $v = \dfrac{Y}{X}$ とすると.

$$\frac{Y^2}{X^2} - \frac{Y}{X} + 1 = C\cdot X^{-2}.$$

$Y^2 - XY + X^2 = C.$　これに $X = x-1$, $Y = y-3$ を代入すれば.

$y^2 - 5y - xy + x^2 + x + 7 = C$　となる. $C-7$ を C でおきなおせば.

$y^2 - 5y - xy + x^2 + x = C$　が求める解である.

No.

問題 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-2y-1}$

(2) $y' = \dfrac{6x-2y-3}{2x+2y-1}$

答 (1) まず、$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ を解くと $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ となる.

∴ $X=x-1$, $Y=y$ を使い変数変換をすれば、$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{dy}{dx}$ より

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X-2Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1-2\cdot\frac{Y}{X}}$$ とでき、同次形になる.

∴ $v=\dfrac{Y}{X}$ とおけば、公式より

$$\frac{dv}{dX} = \frac{1}{X}\left(\frac{1-v}{1-2v}-v\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{1-2v+2v^2}{1-2v}\right)$$ を得る.

ここで変数分離形の公式を使い計算すると.

$$\int \frac{1-2v}{1-2v+2v^2}\,dv = \int \frac{1}{X}\,dX$$

$$-\frac{1}{2}\log(1-2v+2v^2) = \log X + C$$

$1-2v+2v^2 = e^{-2C}\cdot X^{-2}$ となる. e^{-2C} を C でおきなおし. $v=\dfrac{Y}{X}$ を代入すると.

$2\cdot\dfrac{Y^2}{X^2} - 2\cdot\dfrac{Y}{X} + 1 = C\cdot\dfrac{1}{X^2}$ より

$2Y^2-2XY+X^2=C$ を得る. これに $X=x-1$, $Y=y$ を代入し計算すれば.

$2y^2-2xy+2y+x^2-2x=C$ を得る.

(2) まず、$\begin{cases} 6x-2y-3=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ を解くと、$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ を得る。

これより、$X=x-\frac{1}{2}$, $Y=y$ とおいて変数変換をすれば、$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$ より

$$\frac{dY}{dX}=\frac{6X-2Y}{2X+2Y}=\frac{3X-Y}{X+Y}=\frac{3-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$$ となり同次形になる。

ここで $v=\frac{Y}{X}$ とおけば、公式より

$$\frac{dv}{dX}=\frac{1}{X}\left(\frac{3-v}{1+v}-v\right)=\frac{1}{X}\cdot\frac{-v^2-2v+3}{1+v}$$ となる。

ここで、変数分離形の公式を使い計算すれば、

$$\int\frac{1+v}{v^2+2v-3}\,dv=-\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$\frac{1}{2}\log(v^2+2v-3)=\log X^{-1}+C$$

$v^2+2v-3=e^{2C}\cdot X^{-2}$ となる。e^{2C} を C でおきなおし、$v=\frac{Y}{X}$ を代入すれば、

$$\frac{Y^2}{X^2}+\frac{2Y}{X}-3=C\cdot X^{-2}.$$

$Y^2+2XY-3X^2=C$ である。ここで $X=x-\frac{1}{2}$, $Y=y$ を代入して、

$y^2+2xy-y-3x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=C$ となる。

全体に2をかけ $2C+\frac{3}{2}$ を C でおきなおせば、

$2y^2+4xy-2y-6x^2+3x=C$ となる。