No.

解の表し方

① 陽関数解

$y = y(x)$ の形で表されるもの

例 $y = -\cos x + x + C$, $y = -\frac{1}{x+4}$

② 陰関数解

$\varphi(x, y) = 0$ の形で表されるもの

例 $x^2 + y^2 - C = 0$, $\cos y - \frac{x^2}{2} + 2 = 0$

③ 媒介変数表示解

第3の変数 α を用いて.

$x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ の形で表されるもの

例 $\begin{cases} x = \alpha - \sin\alpha \\ y = 1 - \cos\alpha \end{cases}$

問題 (1). $\cos y - \frac{x^2}{2} + 2 = 0$ が $y' = -\frac{x}{\sin y}$ の解になっていることを示せ.

(2). $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ が $yy' + x = 0$ の解になっていることを示せ.

答 (1). 微分すると. $-y' \cdot \sin y - x = 0$ を得る. これを整理すると.

$y' = -\frac{x}{\sin y}$ となるので, 解である

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より. 代入すると.

左辺 $= yy' + x = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha = 0 =$ 右辺 となるので.

これは解である.

§2. 求積解法

求積法ってなに?

積分を数回行って、微分方程式の解を見つける方法を求積法という。

計算は形式的に行う(定義域などにこだわらない)

→そのかわり、検算が必要である(講義では省略)。

① 変数分離形

$p(x)$, $q(y)$ を、それぞれ、x、y の関数として、

$y' = \dfrac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y)$ の形の微分方程式を変数分離形という。

例 $y' = -\dfrac{x}{y}$, $(x-1)y' + (y-1) = 0$

この形の微分方程式を解くにはどうすればいいか?

答. $\dfrac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y)$ を変形して、

$\dfrac{1}{q(y)} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p(x)$ とする。これを x で積分すると、

$\displaystyle\int \frac{1}{q(y)} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int p(x) \cdot dx$ となる。

これより、

公式 $\displaystyle\int \frac{1}{q(y)}\, dy = \int p(x)\, dx$ を得る。

これが一般解の陰関数表示になる。

例題. $(x-1)y'+(y-1)=0$ の一般解を求めよ.

答. まず変形すると.

$$y' = -\frac{y-1}{x-1}$$ とできる.

$p(x) = -\frac{1}{x-1}$, $q(y) = y-1$ として公式を用いると.

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int -\frac{1}{x-1}\,dx.$$ となる. 以下計算すると.

$$\log(y-1) = -\log(x-1) + C$$

$$\log(x-1)(y-1) = C.$$

$e^{\log a} = a$ を使っている. 以後. よく使う.

$$(x-1)(y-1) = e^{C}$$

ここであらためて. e^{C} を C でおきなおして.

e^{C} は任意定数とみることができるので.
式を簡単にするため. C とおきなおしている
$e^{C}=C$ ではないので注意.

$(x-1)(y-1) = C$ を得る. これが求める一般解である.

問題. 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = -\frac{x}{y}$　　(2) $y' \sin x = y \cdot \cos x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(3) $y^3 + x^6 \cdot y' = 0$.

答 (1) $p(x) = -x$, $q(y) = \frac{1}{y}$ として公式を用いると.

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$ となる. 計算すると.

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$x^2 + y^2 = 2C.$　ここで. $2C$ を C でおきなおして.

$x^2 + y^2 = C$ を得る.

(2). $y' = y \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$ より. $p(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $q(y) = y$ とおいて.

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$ となる. 以下計算すると.

$$\log y = \log \sin x + C$$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x)$ を使っている. 以後よく使う.

$$y = e^{\log \sin x + C} = e^{C} \cdot \sin x$$ となる.

ここで, e^C を C でおきなおして.

$$y = C \cdot \sin x$$ を得る.

今 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ であるので,

$$1 = C \cdot \sin \frac{\pi}{2} = C$$ を得る.

$\therefore$ $y = \sin x$ が求める解である.

(3) $y' = -\dfrac{y^3}{x^6}$ より. $p(x) = -\dfrac{1}{x^6}$, $q(y) = y^3$ とおいて.

$$\int \frac{1}{y^3}\,dy = -\int \frac{1}{x^6}\,dx$$ となる. これより.

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{5}x^{-5} + C$$ を得る. これを整理して.

$$-5x^5 = 2y^2 + 10C \cdot x^5 y^2$$

ここで $10C$ を C でおきなおして.

$$5x^5 + 2y^2 + C \cdot x^5 y^2 = 0$$ を得る.

変数変換して変数分離形になるもの

例) $y' = (x-y)^2$ の一般解を求める.

$\longrightarrow$ この形のままでは変数分離形ではないが、

$u = x - y$ とおいて変数変換を行うと.

$u' = 1 - y'$ より. 与式は

$1 - u' = u^2$ となり. $u' = 1 - u^2$ とできる.

これより. 変数分離形の公式を使って計算すると.

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \int 1 \cdot dx$$

ここで. $\displaystyle\int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\, du$

$$= \frac{1}{2}\log(1+u) - \frac{1}{2}\log(1-u) = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$$

$\displaystyle\int 1\, dx = x$ より.

$\displaystyle\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} = x + C$ となる. これより

$\displaystyle\frac{1+u}{1-u} = e^{2C} \cdot e^{2x}$ e^{2C} を C とおきかえて.

$\displaystyle\frac{1+u}{1-u} = C \cdot e^{2x}$ となる. ここで. $u = x - y$ を代入すると.

$\displaystyle\frac{1+x-y}{1-x+y} = C \cdot e^{2x}$ より

$\displaystyle y = \frac{2}{Ce^{2x}+1} + x - 1$ を得る.

問題．かっこ内の変数変換を用いて．次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1). $xy' = e^{-xy} - y \quad (v = xy)$

(2) $y' = (x + e^{y} - 1)e^{-y} \quad (v = x + e^{y})$

答．(1) $v = xy$ より．両辺を x で微分すると．

$v' = y + xy'$ となる．これより与式は．

$v' = e^{-v}$ とできる．ここで公式より

$\int e^{v} \cdot dv = \int 1 \cdot dx$ ．となり．

$e^{v} = x + C$ を得る．$v = xy$ を代入して．

$e^{xy} = x + C$ が求める解である．

(2). $v = x + e^{y}$ より．両辺を x で微分して．

$v' = 1 + y' \cdot e^{y}$ となる．これより．与式は

$v' = v$ とできる．ここで公式より

$\int \frac{1}{v} dv = \int 1 \, dx$ となり．

$\log v = x + C$．

$v = e^{C} \cdot e^{x}$ を得る．ここで e^{C} を C でおきなおし．$v = x + e^{y}$ を代入すると．

$e^{y} = C \cdot e^{x} - x$ となる．