ラプラス変換を使って微分方程式を解く.

初期値問題.

$$\text{微分方程式と初期条件} \xrightarrow{\text{ラプラス変換}} \text{代数方程式}$$

$$\text{微分方程式の解} \xleftarrow{\text{ラプラス逆変換}} \text{代数方程式の解}$$

微分方程式を直接解くのではなく、ラプラス変換を使って

代数方程式にしてから解く.

よく使う式. $L(x(t)) = X(s)$ とするとき、

$$L(x'(t)) = sX(s) - x(0)$$

$$L(x''(t)) = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) \qquad (X(s) = X \text{ ともかく})$$

例題.

$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$ を解け.

答. まず両辺をラプラス変換すると.

$$s^2X(s) - s + 1 - 6(sX(s) - 1) + 9X(s) = 0 \quad \cdots ☆$$

$$(s^2 - 6s + 9)X(s) = s + 7$$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-6s+9} = \frac{1}{s-3} - \frac{4}{(s-3)^2} \quad \text{より.}$$

$$x(t) = L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - 4 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right)$$

$$= e^{3t} - 4t \cdot e^{3t}$$

ここで、☆ のように、両辺をラプラス変換してえられた方程式を

像方程式 という.

問題　次の微分方程式を解け.

(1)　$x'(t) - 3x(t) = e^{2t}$,　$x(0) = 2$.

(2)　$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$,　$x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

答. (1). 両辺をラプラス変換すると.

$$sX(s) - 2 - 3X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)X(s) = \frac{2s-3}{s-2}$$ より

$$X(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-3)} = \frac{3}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$ である.

$\therefore$ $x(t) = L^{-1}(X(s)) = 3 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = 3 \cdot e^{3t} - e^{2t}$ となる

(2). 両辺をラプラス変換すると.

$$s^2X(s) - s + 3 + 4(sX(s) - 1) + 4X(s) = 0$$

$$(s^2 + 4s + 4)X(s) = s + 1$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+4} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$ より

$x(t) = L^{-1}(X(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right) = e^{-2t} - t \cdot e^{-2t}$ となる.

2階線形微分方程式の解法

微分方程式

$a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = f(t)$　$(a \neq 0)$, $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1$ を考える.

この右辺を 0 とした

$a \cdot x''(t) + b x'(t) + c x(t) = 0$ を 補助方程式 という.

もとの方程式のラプラス変換をとると.

$$a(s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)) + b(s X(s) - x(0)) + c X(s) = F(s)$$

$$(as^2 + bs + c) X(s) = a c_0 s + a c_1 + b c_0 + F(s)$$ となる.

ここで, $H(s) = as^2 + bs + c$

$H_0(s) = a c_0 s + a c_1 + b c_0$　とおけば.

$$X(s) = \frac{H_0(s)}{H(s)} + \frac{F(s)}{H(s)}$$ となる. これより解は.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)$$ となる.

ここで, 右辺の第1項は. 補助方程式の一般解になっている

∵ $f(t) = 0$ とおいて. 同じ計算を行う.

また, 右辺の第2項は. もとの方程式の特殊解になっている.

ここで、$H(s)$ をこの方程式の特性関数といい．

2次方程式　$H(s)=as^2+bs+c=0$ を特性方程式という．

・$L^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right)$ は．部分分数を使うか．ラプラス変換表の 14.15 を使うと求めることができる．

・$L^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)$ は．$W(s)=\frac{1}{H(s)}$，$w(t)=L^{-1}(W(s))=L^{-1}\left(\frac{1}{H(s)}\right)$ とおけば，

$$L^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)=L^{-1}(F(s)\cdot W(s))=(w*f)(t)$$ と求めることができる

問題．次の微分方程式を解け．

(1) $x''(t)+x(t)=1$，$x(0)=x'(0)=0$

(2) $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=e^t$，$x(0)=x'(0)=0$

答 (1)．両辺をラプラス変換すると．

$$s^2X(s)+X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}$$ より

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)*L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=\sin t*1$$

$$=\int_0^t \sin s\,ds=\left[-\cos s\right]_0^t=-\cos t+1$$ である．

(2) 両辺をラプラス変換すると．

$$s^2X(s)-3sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}=\frac{-1}{(s-1)^2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2}$$ より

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=L^{-1}\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{-1}{s-1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)=-te^t-e^t+e^{2t}$$ である

No.

境界値問題

区間 $[t_0, t_1]$ で定義された関数 $x(t)$ の2階微分方程式について.

$x(t_0)=a$, $x(t_1)=b$

である解を求める問題を 境界値問題 といい.

上の条件を 境界値 または 境界条件 という.

例題 次の境界値問題を解け.

$$x''(t)-4x'(t)+5x(t)=0 \ , \ x(0)=0 \ , \ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 .$$

答. $x'(0)=c$ とおくと. 像方程式は.

$$s^2X-c-4sX+5X=0$$

$$X=\frac{c}{s^2-4s+5}=\frac{c}{(s-2)^2+1}$$

$$\therefore x=L^{-1}(X)=L^{-1}\left(\frac{c}{(s-2)^2+1}\right)=c\cdot e^{2t}\cdot \sin t .$$

ここで $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ より

$$1=c\cdot e^{\pi} \qquad \therefore c=e^{-\pi}$$

$\therefore x=e^{2t-\pi}\cdot\sin t$ である.

問題. 次の境界値問題を解け.

(1) $x''+3x'-4x=0$, $x(0)=0$, $x(1)=1$

(2) $x''-x'-2x=3e^{2t}$ $x(0)=0$, $x(1)=e^2$

答. (1) $x'(0)=C$ とおくと. 像方程式は.

$$s^2X-c+3sX-4X=0$$

$$X=\frac{c}{s^2+3s-4}=\frac{c}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+4}\right)$$ より

$$x=L^{-1}(X)=\frac{c}{5}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{c}{5}L^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right)$$

$$=\frac{c}{5}\left(e^{t}-e^{-4t}\right)$$ である

ここで $x(1)=1$ より

$$1=\frac{c}{5}\cdot(e-e^{-4}) \qquad \therefore c=\frac{5}{e-e^{-4}}$$

$$\therefore x=\frac{e^{t}-e^{-4t}}{e-e^{-4}}$$ である

(3) $x'(0)=C$ とおくと. 像方程式は

$$s^2X-c-sX-2X=3\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$X=\frac{3}{(s^2-s-2)(s-2)}+c\cdot\frac{1}{s^2-s-2}$$

$$=\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{c}{3}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}\right)$$

$$\therefore x=L^{-1}(X)=t\cdot e^{2t}-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{c}{3}\left(e^{2t}-e^{-t}\right)$$ である

ここで $x(1)=e^2$ より. $c=1$ である.

$\therefore x=t\cdot e^{2t}$ となる.