ラプラス逆変換

定理. $[0,\infty)$ 上の関数 $f(t)$ と $g(t)$ について.

$L(f(t))=L(g(t))$ ならば, $f(t)=g(t)$ である.

$\because$ $L(f(t)-g(t))=0$ より.

$$\int_0^\infty e^{-st}(f(t)-g(t))\,dt=0$$ であるが.

もし. $f(t)\geqq g(t)$ であれば. $f(t)=g(t)$ でなければならない.

もし. ある $T>0$ まで $f(t)\geqq g(t)$ であったとすると.

s を十分大きくすることで.

$$0=\int_0^\infty e^{-st}(f(t)-g(t))\,dt \fallingdotseq \int_0^T e^{-st}(f(t)-g(t))\,dt \geqq 0$$

とすることができる. これより. $[0,T]$ で $f(t)=g(t)$ となる.

あとは. T をどんどん大きくとればよい.

この定理から. $F(s)$ に対して. $L(f(t))=F(s)$ となる

$f(t)$ がただ一つ存在する.

この $f(t)$ を $F(s)$ の ラプラス逆変換 といい.

$$f(t)=L^{-1}(F(s))$$ で表す.

ラプラス逆変換は与えられた関数を基本法則で変形させて.

既知の関数の形にし, ラプラス変換表を用いることで求められる.

例題 次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{3s+2}$ (2) $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+\lambda^2}$

答 (1) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{3s+2}\right)=\dfrac{1}{3}L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+\frac{2}{3}}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot e^{-\frac{2}{3}t}$

(2) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+\lambda^2}\right)=\dfrac{1}{\lambda}\cdot L^{-1}\left(e^{-\pi s}\cdot\dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}\right)$

ここで. $F(s)=\dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ とおくと. $f(t)=\sin\lambda t$ より.

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda}L^{-1}\left(e^{-\pi s}\cdot F(s)\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\,f(t-\pi)U(t-\pi)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\cdot U(t-\pi)\cdot\sin\lambda(t-\pi)$$ である.

問題 次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{2s-1}$ (2) $\dfrac{s\cdot e^{-3s}}{s^2+\lambda^2}$ (3) $\dfrac{1}{(s-\lambda)^2}$

答 (1) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{2s-1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}t}$

(2) $L^{-1}\left(\dfrac{s\cdot e^{-3s}}{s^2+\lambda^2}\right)=L^{-1}\left(e^{-3s}\cdot\dfrac{s}{s^2+\lambda^2}\right)=U(t-3)\cdot\cos\lambda(t-3)$

(3) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-\lambda)^2}\right)=e^{\lambda t}\cdot t$ である.

No.

有理関数のラプラス逆変換.

有理関数の場合、部分分数にするとラプラス逆変換が求まる場合がある.

例題. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3}\right)$ を求めよ.

答. $\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3} = \dfrac{A}{(s-2)^3} + \dfrac{B}{(s-2)^2} + \dfrac{C}{s-2}$ とおくと.

$\begin{cases} C=1. \\ B-4C=-1 \\ A-2B+4C=3 \end{cases}$ より $\begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \end{cases}$ を得る.

これより. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3}\right) = 5\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-2)^3}\right) + 3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-2}\right)$

$= \dfrac{5}{2}e^{2t}\cdot t^2 + 3\cdot e^{2t}\cdot t + e^{2t}$ となる.

問題. 次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}$ (2) $\dfrac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3}$ (3) $\dfrac{5}{(s+2)(s^2+1)}$

答 (1). $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6} = \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}$ より.

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}\right) = 3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)$

$= 3\cdot e^{-2t} - e^{-3t}$ である.

(2). $\dfrac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3} = \dfrac{2}{(s-1)^3} + \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{3}{s-1}$ より

$$L^{-1}\left(\frac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + 3\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$= e^t\cdot t^2 + e^t\cdot t + 3\cdot e^t$ である.

(3) $\dfrac{5}{(s+2)(s^2+1)} = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{-s+2}{s^2+1}$

$= \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{s}{s^2+1} + 2\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$ より

$$L^{-1}\left(\frac{5}{(s+2)(s^2+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + 2\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$= e^{-2t} - \cos t + 2\sin t$ である.

ラプラス逆変換からみた合成法則.

$L^{-1}(F(s)) = f(t)$, $L^{-1}(G(s)) = g(t)$ のとき,

$L^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = f*g\ (t)$ である.

例題. $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right)$ を求めよ.

答. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ とおくと. $f(t) = L^{-1}(F(s)) = \sin t$ である.

これより. $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right) = L^{-1}(F(s)\cdot F(s))$

$= \sin t * \sin t$ である. さらに.

$\sin t * \sin t$

$= \int_0^t \sin s \cdot \sin(t-s)\, ds$

$= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(t-2s) - \cos t \, ds$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-2} \sin(t-2s) - s \cdot \cos t \right]_0^t$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\sin(-t) - \sin t) - t \cos t \right)$

$= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cdot \cos t$ である.

問題. 合成法則を用いて. ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\frac{1}{(s-\lambda)(s-\mu)}$ $(\lambda \neq \mu)$ (2) $\frac{1}{s^2(s+\lambda)}$

答 (1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-\lambda} \cdot \frac{1}{s-\mu}\right) = e^{\lambda t} * e^{\mu t}$

$= \int_0^t e^{\lambda s} \cdot e^{\mu(t-s)} \cdot ds = \int_0^t e^{\mu t + s(\lambda - \mu)} ds$

$= \left[\frac{1}{\lambda - \mu} e^{\mu t + s(\lambda - \mu)} \right]_0^t = \frac{1}{\lambda - \mu} (e^{\lambda t} - e^{\mu t})$

(2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+\lambda)}\right) = t * e^{-\lambda t}$

$= \int_0^t s \cdot e^{-\lambda t + \lambda s} ds = \left[\frac{1}{\lambda} s \cdot e^{-\lambda t + \lambda s} \right]_0^t - \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda t + \lambda s} ds$

$= \frac{1}{\lambda} t - \frac{1}{\lambda^2} \left[e^{-\lambda t + \lambda s} \right]_0^t$

$= \frac{1}{\lambda} t - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$ である