No.

5. 像の移動法則

$$L(e^{\mu t}\cdot f(t)) = F(s-\mu)$$

$$\text{∵}\ L(e^{\mu t}\cdot f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{\mu t}\cdot f(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s-\mu)t}\cdot f(t)\,dt$$
$$= F(s-\mu)$$

例題. $L(e^{\mu t}\cdot \cosh\lambda t)$ を求めよ

答. $L(\cosh\lambda t) = \dfrac{s}{s^2-\lambda^2}$ より

$$L(e^{\mu t}\cdot\cosh\lambda t) = \frac{s-\mu}{(s-\mu)^2-\lambda^2}$$ である

問題. (1) $L(e^{\mu t}\cdot t^n)$ を求めよ

(2) $L(e^{\mu t}\cdot \sin\lambda t)$ を求めよ.

答 (1). $L(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ より

$$L(e^{\mu t}\cdot t^n) = \frac{n!}{(s-\mu)^{n+1}}$$ である

(2) $L(\sin\lambda t) = \dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ より

$$L(e^{\mu t}\cdot\sin\lambda t) = \frac{\lambda}{(s-\mu)^2+\lambda^2}$$ である.

6. 微分法則.

(1) $L(f'(t)) = s\cdot F(s) - f(0)$ $(s>0)$

(2) $L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - f(0)\cdot s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-2)}(0)s - f^{(n-1)}(0)$

∵ $L(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$

$= [e^{-st}\cdot f(t)]_0^\infty + s\cdot\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$= s\cdot F(s) - f(0)$

$L(f''(t)) = s\cdot L(f'(t)) - f'(0)$

$= s^2 F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$ となる.

以下. これをくり返せばよい.

例題. $L(t\cdot e^{\lambda t})$ を求めよ.

答. $f(t) = t\cdot e^{\lambda t}$ とすると. $f'(t) = e^{\lambda t} + \lambda t\cdot e^{\lambda t}$, $f(0) = 0$ である.

∴ $L(f'(t)) = L(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) = s\cdot L(te^{\lambda t})$

これより $(s-\lambda)L(te^{\lambda t}) = L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$ となるので.

$L(te^{\lambda t}) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$ である.

問題. 次のラプラス変換を微分法則を用いて求めよ

(1) $L(e^{\lambda t})$ (2) $L(t^2 e^{\lambda t})$

答(1) $f(t) = e^{\lambda t}$ とすると. $f'(t) = \lambda\cdot e^{\lambda t}$, $f(0) = 1$ である

∴ $L(\lambda e^{\lambda t}) = L(f'(t)) = s\cdot L(e^{\lambda t}) - 1$ となる

これより $L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$ となる

(2). $f(t) = t^2 \cdot e^{\lambda t}$ とおくと. $f'(t) = 2te^{\lambda t} + \lambda t^2 e^{\lambda t}$, $f(0) = 0$ より

$$L(2te^{\lambda t} + \lambda t^2 e^{\lambda t}) = L(f'(t)) = s \cdot L(t^2 e^{\lambda t})$$ となる.

これより $(s-\lambda)L(t^2 e^{\lambda t}) = 2 \cdot L(te^{\lambda t}) = \dfrac{2}{(s-\lambda)^2}$ より

$$L(t^2 e^{\lambda t}) = \frac{2}{(s-\lambda)^3}$$ である.

7 像の微分法則.

(1) $L(-tf(t)) = F'(s)$

(2) $L((-t)^n f(t)) = F^{(n)}(s)$

∵ $$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty -t \cdot e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= L(-tf(t))$$

$F''(s) = L(-tf'(t)) = L((-t)^2 f(t))$ となる

以下 これを くり返せばよい

<u>例題</u>. $L(t\cos\lambda t)$ を求めよ.

$$L(\cos\lambda t) = \frac{s}{s^2+\lambda^2}$$ より

$$L(t \cdot \cos\lambda t) = -L(-t\cos\lambda t) = -F'(s)$$

$$= -\frac{s^2+\lambda^2-2s^2}{(s^2+\lambda^2)^2} = \frac{s^2-\lambda^2}{(s^2+\lambda^2)^2}$$ である.

No.

問題. (1). $L(t\cdot \sin\lambda t)$ を求めよ

(2) $L(t\cdot e^{\lambda t})$ を求めよ.

答. (1) $f(t)=\sin\lambda t$ とおくと. $F(s)=\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ である.

これより.

$$L(t\sin\lambda t)=-L((-t)\sin\lambda t)=-F'(s)$$

$$=-\frac{-2\lambda s}{(s^2+\lambda^2)^2}=\frac{2\lambda s}{(s^2+\lambda^2)^2}$$ である

(2) $f(t)=e^{\lambda t}$ とおくと $F(s)=\frac{1}{s-\lambda}$ である.

これより

$$L(t\cdot e^{\lambda t})=-L((-t)e^{\lambda t})=-F'(s)$$

$$=\frac{1}{(s-\lambda)^2}$$ である.

8. 積分法則.

(1) $L\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)=\frac{1}{s}F(s)$

(2) $L\left(\int_0^t\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_1} f(\tau)\,d\tau\,d\tau_1\cdots d\tau_{n-1}\right)=\frac{1}{s^n}F(s)$

9. 像の積分法則.

(1) $L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$

(2) $L\left(\frac{f(t)}{t^n}\right)=\int_s^\infty\int_{\sigma_{n-1}}^\infty\cdots\int_{\sigma_1}^\infty F(\sigma)\cdot d\sigma\cdot d\sigma_1\cdots d\sigma_{n-1}$

合成積

関数 $f(t), g(t)$ に対し、

$$h(t) = \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds \qquad (t \geqq 0)$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の合成積 または たたみこみ といい、$h(t) = f*g(t)$ とかく。

また、$t-s=\sigma$ で変数変換すれば、$-ds = d\sigma$ より

$$h(t) = \int_t^0 f(\sigma)\,g(t-\sigma)(-1)\,d\sigma$$

$$= \int_0^t f(\sigma)\,g(t-\sigma)\,d\sigma$$ となるので、

$f*g = g*f$ であることがわかる。

10. 合成法則

$$L(f*g) = L(f)\cdot L(g)$$

例題. 次の関数の合成積と、そのラプラス変換を求めよ。

$f(t) = t \quad , \quad g(t) = \cos t$.

$$\cos t * t = \int_0^t s\cdot\cos(t-s)\,ds$$

$$= \Big[(-1)\cdot s\sin(t-s)\Big]_0^t + \int_0^t \sin(t-s)\,ds$$

$$= \Big[\cos(t-s)\Big]_0^t$$

$$= 1 - \cos t$$ である。

$$L(t*\cos t) = L(t)\cdot L(\cos t) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$ である

問題. 次の関数の合成積とそのラプラス変換を求めよ.

$f(t)=t$, $g(t)=e^t$.

答. $e^t * t = \int_0^t s \cdot e^{t-s} ds$

$= [-s \cdot e^{t-s}]_0^t + \int_0^t e^{t-s} ds$

$= -t + [-e^{t-s}]_0^t$

$= -t - 1 + e^t$ である.

$L(e^t * t) = L(e^t) \cdot L(t) = \frac{1}{s^2(s-1)}$ である.